Муниципальный этап
Всероссийской олимпиады школьников
по математике
в 2018 – 2019 учебном году

Ответы и решения

Общие положения

1) Максимальная оценка за каждую задачу — 7 баллов.

2) 7 баллов ставится за безукоризненное решение задач; 6 баллов означает, что в решении допущена мелкая погрешность, например, не разобран частный случай, не влияющий на решение. 4 или 5 баллов означают, что все идеи, необходимые для решения найдены, задачу в целом надо считать решённой, однако приведённое решение имеет существенные недостатки, например, в доказательстве ключевого факта имеются пробелы, устранимые не совсем очевидным образом. 2 — 3 балла ставится, если в решении задачи имеется серъёзное продвижение, однако для решения необходимы дополнительные идеи, не указанные в решении. 1 балл означает, что в решении имеется только очень мелкое продвижение, как то: замечен, но не доказан ключевой факт, разобран нетривиальный частный случай или приведён (но не обоснован) верный ответ, который не вполне тривиален. Если приведённые в решении факты, идеи, выкладки к решению явным образом не ведут, то задача оценивается в 0 баллов, также как и в случае, когда решение задачи отсутствует.

3) В случае наличия в одной работе нескольких решений оценивается ровно одно решение, то, которое приносит больше баллов. За другие решения баллы не снимаются и не начисляются.

4) Оценка за задачу не может быть снижена за неаккуратный почерк, ошибки в русском языке, или явные описки в выкладках. Также недопустимо снижение баллов за не чёткий чертёж в геометрической задаче или даже за отсутствие такового. Нельзя требовать с участника олимпиады, чтобы он переписывал условие задачи, в том числе не обязательна краткая запись условия геометрических задач.

5) Школьник имеет право сам выбрать способ решения той или иной задачи; не допускается снижать оценку за то, что выбранный школьником способ решения не самый лучший или отличается от предложенных нами способов.

6) Факты и теоремы школьной программы (в том числе и те, которые приведены только в задачах школьных учебников) следует принимать без доказательств. Школьник имеет право без доказательства использовать любые такие факты, даже если они проходятся в более старших классах. Допускается (также без доказательств) использование математических фактов, изучающихся на факультативах. В частности, без ограничения можно применять формулы аналитической геометрии, математического анализа, принцип математической индукции, теоремы теории графов и т.п.

7) Критерии оценки, приведённые в прилагаемых решениях (таблица в конце решения каждой задачи) являются обязательными и не могут быть изменены. Однако это не означает, что выставляемые за задачу баллы обязательно должны совпасть с приведёнными в таблице: в случае, когда жюри вырабатывает дополнительные критерии (см. следующий пункт) жюри может выставить балл, которого в таблице нет (например, в таблице предусмотрены только 0 и 7 баллов, а

жюри выставляет 5 баллов). Таблицы критериев составлены таким образом, что перечисляют отдельные случаи; накопление баллов за разные пункты не предусмотрено.

8) В случае, если решение школьника принципиально отличается от решений, предложенных программным комитетом, и не может быть подведено под предлагаемые критерии, проверяющие вырабатывают критерии самостоятельно в соответствии с пунктом 2.

9) В случае возникновения спорных ситуаций при проверке работ олимпиады жюри вправе обратиться за разъяснениями и советом к составителям пакета заданий: д.ф-м.н. Валерию Трифоновичу Шевалдину и к.ф-м.н. наук Сергею Эрнестовичу Нохрину (адрес эл.почты **varyag2@mail.ru**, тел. +**79220350324**).

Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике в 2018 – 2019 учебном году
8 класс

Время выполнения заданий — 4 часа

8.1. *Ежемесячная пенсия футбольного болельщика Ивана Ивановича составляет*

$$\frac{149^6 - 199^3}{149^4 + 199^2 + 199 \cdot 149^2}$$

рублей, а стоимость билета на матч чемпионата мира по футболу составляет 22 000 рублей. Хватит ли Ивану Ивановичу пенсии за один месяц, чтобы купить себе один билет? Ответ обоснуйте.

Решение: Пусть $149^2 = a$, $199 = b$. Тогда ежемесячная пенсия Ивана Ивановича составляет (в рублях)

$$\frac{a^3 - b^3}{a^2 + b^2 + a \cdot b} = \frac{(a-b)(a^2 + ab + b^2)}{a^2 + ab + b^2} = a - b = 149^2 - 199 = 22002.$$

Значит, на один билет пенсии ему хватит.

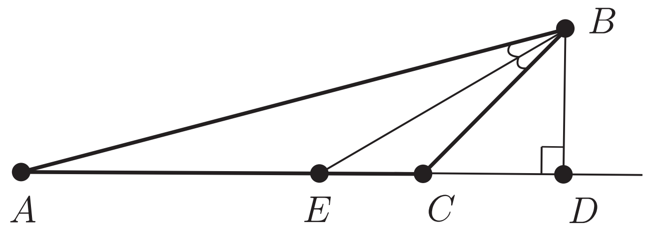
Ответ: Хватит.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Верный и полностью обоснованный ответ	7 баллов
При подсчёте допущены арифметические ошибки, возможно, приведшие к неверному ответу	снять по 2 балла за каждую
Применена формула разности кубов и осуществлено сокращение дроби	5 баллов
Задача сведена к алгебре введением переменных (одной или двух), но не решена	3 балла
Ответ без обоснования и/или неверный ответ	0 баллов

8.2. *Один из углов треугольника на 120° больше другого. Докажите, что биссектриса, проведенная из вершины третьего угла, вдвое больше высоты, проведенной из этого угла.*

Решение: Пусть в треугольнике ABC угол C больше угла A на 120°, BD и BE — высота и биссектриса соответственно (см рисунок). Обозначим угол A через α. Тогда $\angle C = 120° + \alpha$. Поскольку сумма внутренних углов треугольника равна $180°$, имеем $\angle B = 60° - 2\alpha$. Значит, $\angle CBE = \frac{1}{2}\angle B = 30° - \alpha$. Наконец, из треугольника BEC получаем, что $\angle BEC = \angle BED = 180° - \angle C - \angle CBE = 30°$. В прямоугольном треугольнике BDE катет BD лежит против угла в $30°$, поэтому он вдвое короче гипотенузы BE. Утверждение доказано.



К решению задачи 8.2

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Верное доказательство	7 баллов
Есть попытка выразить все углы через одну переменную, но она не доведена до решения	5 баллов
Указано, что задача равносильна доказательству того, что $\angle BEC = 30°$	2 балла
Задача решена для конкретного треугольника (например, с углами $20°$, $20°$, $140°$)	1 балл
Верные утверждения, которые не ведут к решению (вне зависимости от того, доказаны ли они)	0 баллов

8.3. *Пусть a и b — различные ненулевые числа, и $a^2 + \frac{1}{b} = b^2 + \frac{1}{a}$. Докажите, что хотя бы одно из чисел a или b — отрицательно.*

Решение: Проведём равносильные (при $a \neq b$) преобразования.

$$a^2 + \frac{1}{b} = b^2 + \frac{1}{a}, \qquad a^2 - b^2 = \frac{1}{a} - \frac{1}{b},$$

$$(a-b)(a+b) = \frac{b-a}{ab}, \qquad a+b = -\frac{1}{ab}.$$

Если оба числа a и b положительны, то число в левой части положительно, а в правой — отрицательно. Равенство не выполнено — противоречие. Значит, хотя бы одно из чисел a или b отрицательно, что и требовалось доказать.

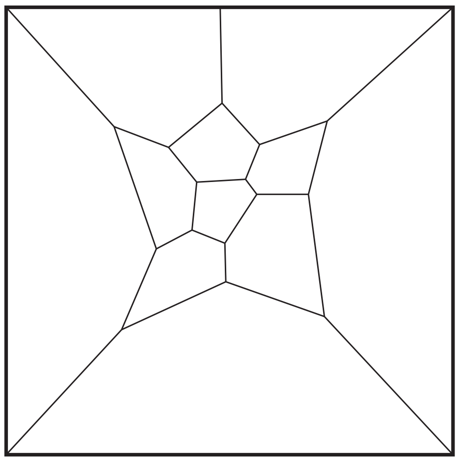
Примечание: Возможны обе ситуации: 1) среди чисел a и b отрицательно ровно одно; 2) оба числа, и a, и b отрицательны. Школьник не обязан доказывать возможность этих ситуаций, равно как не обязан приводить никаких примеров, показывающих непротиворечивость условия задачи.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Верный и полностью обоснованный ответ	7 баллов
Равенство верно преобразовано к удобному для рассуждений виду, но рассуждение не приведено или неверно	4 балла
Преобразования, не приводящие к решению и/или примеры пар $(a; b)$, удовлетворяющих условию	0 баллов

8.4. *Можно ли разрезать квадрат на несколько выпуклых пятиугольников (не обязательно равных)? Ответ обоснуйте.*

Решение: Один из примеров разрезания приведён на рисунке.



К решению задачи 8.4

Ответ: Можно.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Верный пример разрезания	7 баллов
Всё остальное	0 баллов

8.5. *Первые две цифры натурального четырёхзначного числа либо меньше 5 каждая, либо больше 5 каждая. Про последние две цифры можно сказать то же самое. Сколько всего таких чисел? Ответ обоснуйте.*

Решение: Двузначных чисел, у которых обе цифры больше 5, ровно $4^2 = 16$, у которых обе цифры меньше 5 — ровно $4 \cdot 5 = 20$ (первая цифра не ноль). Всего таких чисел $16 + 20 = 36$. Это — вывод про первые две цифры числа. Последние две цифры дадут столько же вариантов плюс ещё 5: 00, 01, 02, 03 и 04 — итого 41 вариант. Всего чисел $36 \cdot 41 = 1476$.

Примечание: 1476 чисел.

Рекомендации по проверке:

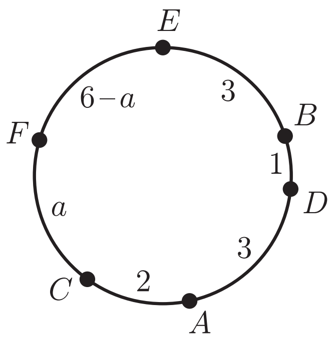
есть в работе	баллы
Верный и полностью обоснованный ответ	7 баллов
Ответ неверен из-за ошибок в арифметике	6 баллов
Ответ полностью обоснован, но записан не в виде натурального числа	баллы не снижать
При верном рассуждении не учтено, что первая цифра числа никогда не равна нулю	5 баллов
При верном ходе решения неверно подсчитано количество пар первых (и/или последних) двух цифр числа; ошибка не в арифметике	4 балла
Попытка отдельно подсчитать количество пар первых двух цифр числа и последних двух цифр числа без дальнейшего продвижения в решении	2 балла
Верный ответ без обоснования или перебором, в случае если не доказана и не очевидна полнота последнего	1 балл
Попытки решить перебором, не приведшие к верному ответу	0 баллов

8.6. *На круговом шоссе длиной 15 км находятся 6 различных городов A, B, C, D, E, F (не обязательно именно в таком порядке). Барон Мюнхгаузен проехал по маршруту $A - B - C - D - E - A$ (каждый переезд осуществлялся по наиболее короткой дуге, связывающей указанные пункты) и утверждает, что длины перегонов были (в километрах) таковы: $AB = 4$, $BC = 6$, $CD = 5$, $DE = 4$, $EA = 7$. Могли ли слова барона оказаться правдой, если*

а) барон ни разу не проехал через пункт F;

б) барон проехал всё шоссе целиком?

Ответ обоснуйте.



К решению задачи 8.6

Решение: а) Могли. Города идут в порядке (например, при обходе по часовой стрелке) $E - B - D - A - C - F - E$, и расстояния такие: $EB = 3$, $BD = 1$, $DA = 3$, $AC = 2$, $CF + FE = 7$, F — в любой точке дуги CE — см. рисунок.

б) Ориентируем перегоны маршрута со знаком «+», если они идут по часовой стрелке, и со знаком «—», если против. Так как начало и конец маршрута совпадают, то знакопеременная сумма всех перегонов маршрута (обозначим её через S) равняется $15n$, где n — количество полных оборотов, совершённых бароном при поездке. Заметим, что чётность (нечётность) суммы целых чисел не зависит от того, с каким знаком эти числа входят в сумму. Таким образом, число S имеет ту же чётность, что и число $4+6+5+4+7=26$. Тогда n — чётно. Так как $S \leqslant 26$, то $n<2$. Значит, $n=0$ и всё шоссе барон проехать не мог.

Ответ: а) Да, могли. б) Нет, не могли.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	**баллы**
Верно решены оба пункта а) и б)	7 баллов
В примере к пункту а) не указано положение города F	баллы не снижать
Верный пример в пункте а), а в пункте б) есть идея чётности	5 баллов
Верное доказательство пункта б) (пункт а не выполнен)	4 балла
Верный пример в пункте а) (пункт б не выполнен)	3 балла
Идея чётности длины маршрута в пункте б) (пункт а не выполнен)	2 балла
Ответ без обоснования и/или неверный ответ	0 баллов