Муниципальный этап всероссийской олимпиады школьников по математике

2018/19 учебный год

8 класс

Ответы и решения задач

1. УСЛОВИЕ

Имеются 4 пакета и весы с двумя чашками без гирь. С помощью 5 взвешиваний расположить пакеты по весу.

Решение. С помощью трех взвешиваний расположим по весу три пакета (взвешивая каждую пару), потом положим на одну чашку весов оставшийся (четвертый) пакет, а на другую тот из трех, который имеет средний вес. Пятым взвешиванием сравним вес четвертого пакета либо с самым тяжелым, либо с самым легким из трех.

2. УСЛОВИЕ

Сумма нескольких чисел равна 1. Может ли сумма их квадратов быть меньше 0,01?

Решение. Если, например, каждое из из n чисел равно $1/n$, то сумма этих чисел равна 1, а сумма их квадратов равна $1/n$ и при $n > 100$ сумма квадратов будет меньше 0,01.

Ответ: может.

3. УСЛОВИЕ

В классе 33 ученика, а сумма их возрастов составляет 430 лет. Справедливо ли утверждение, что найдутся в классе 20 учащихся, сумма возрастов которых больше 260?

Доказательство. Если бы сумма возрастов 20 старших учащихся класса была не больше 260, то среди них были бы ученики в возрасте не больше 13 лет, значит, каждый из 13 младших школьников не старше13 лет, откуда сума их возрастов не превышает $13^2 = 169$ лет, но тогда сумма возрастов всех одноклассников не превышала бы $260 + 169 = 429$ лет, что противоречит условию задачи. Итак, от противного доказано, что сумма возрастов 20 старших школьников больше 260.

4. УСЛОВИЕ

Можно ли расставить по окружности 20 красных и несколько синих фишек так, чтобы в каждой точке, диаметрально противоположной красной фишке, стояла синяя и никакие две синие фишки не стояли рядом?

Доказательство. По условию красные и синие фишки должны чередоваться (на окружности), значит, всего их 40. На полуокружности между красной и противоположной ей синей фишкой стоят 19 фишек, значит, крайние из этих 19 – одноцветны, а они должны быть разноцветными, как соседние – одна – с красной, другая – с синей. Следовательно, указанная в задаче расстановка фишек невозможна.

5. УСЛОВИЕ

Турист отправляется в поход из A в B и обратно и проходит весь путь за 3 часа 41 минуту. Дорога из A в B сначала идет в гору, потом по ровному месту и затем под гору. На каком протяжении дорога проходит по ровному месту, если скорость туриста составляет при подъеме в гору 4 км/час, на ровном месте 5 км/час и при спуске с горы 6 км/час, а расстояние АВ равно 9 км?

Решение. Пусть x км пути проходят по ровному месту, тогда $9 - x$ км пути (в гору и под гору) турист проходит дважды, один раз (каждый из участников подъема или спуска) со скоростью 4 км/час, другой со скоростью 6 км/час и затратит на этот путь $(9 - x)/4 + (9 - x)/6$ часов. Так как по ровному месту турист идет $2x/5$ часов, а путь в оба конца проходит за 3 часа 41 минуту, то $2x/5 + (9 - x)/4 + (9 - x)/6 = 221/60$, откуда $x = 4$ км.

Ответ: 4 км.

6. УСЛОВИЕ

Из точки B квадратного биллиарда пускаем шарик параллельно диагонали. Найти множество таких точек на биллиарде, что если из них пустить одновременно с первым с той же скоростью и в том же направлении второй шарик, то они столкнутся.

Ответ. Искомое множество точек есть совокупность трех отрезков, - двух, проходящих через точку B и параллельных сторонам квадрата, и третьего отрезка, параллельного выбранной диагонали и проходящего через точку, симметричную точке B относительно этой диагонали.