Математика, 8 класс, муниципальный этап

Общие принципы проверки и оценивания олимпиадных работ

Задания математических олимпиад являются творческими, допускают несколько различных вариантов решений. Кроме того, необходимо оценивать частичные продвижения в задачах (например, разбор одного из случаев методом, позволяющим решить задачу в целом, доказательство леммы, используемой в одном из доказательств, нахождение примера или доказательства оценки в задачах типа «оценка + пример» и т.п.). Наконец, возможны как существенные, так и не влияющие на логику рассуждений логические и арифметические ошибки в решениях. Окончательные баллы по задаче должны учитывать все вышеперечисленное.

В соответствии со стандартными правилами проведения математических олимпиад школьников ***каждая задача оценивается в целое число баллов от 0 до 7***.

Соответствие правильности решения и выставляемых баллов приведено в таблице.

Баллы	**Правильность (ошибочность) решения**
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрение отдельных случаев, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев, или в задаче типа «оценка + пример» верно получена оценка.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0-1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Ниже будут приведены критерии к предложенным задачам олимпиады (локальные критерии), содержащие указания к оцениванию (в баллах) некоторых предполагаемых ошибок и частичных продвижений. Такие локальные критерии по отдельным задачам имеют более высокий приоритет по отношению к универсальным критериям: к примеру, если в универсальных критериях за рассмотрение одного из двух случаев сказано, что это оценивается в 4 балла, а в локальных критериях к задаче – что в 2 балла, то баллы выставляются в соответствии с локальными критериями.

Важно отметить, что любое правильное (!) решение оценивается в 7 баллов.

Оценивается только математическая правильность, корректность, полнота решения; баллы не снижаются за «недостаточную» красоту, оптимальность решения, за исправления и помарки (позволяющие прочитать и оценить текст работы. Недопустимо снимать баллы за то, что решение слишком длинное, или за то, что решение школьника отличается от приведенного или от других решений, известных жюри. В то же время любой сколь угодно длинный текст решения, не содержащий полезных продвижений, должен быть оценен в 0 баллов.

Все решения, если не указано противное, требуют обоснования.
Если решения не совпадают с приведенными, читайте внимательно!

Максимально за все задания олимпиады – 35 баллов.

№ задания	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**Всего**
Баллы	7	7	7	7	7	**35**

Решения, критерии и указания по проверке

1. У Семена есть 20 чисел: 1, 2, 3, …, 19, 20. Он составил 10 дробей, вписав десять из этих чисел в каком-то порядке в числители, а остальные в каком-то порядке записал в знаменатели. Какое наибольшее количество целых чисел мог получить Семен после того, как сократит все записанные дроби?

Ответ: 8 чисел.

Решение:

Чтобы дроби имели целое значение, простые числа 11, 13, 17, 19 могут быть только числителями при знаменателе 1. Значит, для составления дробей, равных целому числу, могут быть использованы не более 17 чисел, т.е. составлено не более 8 дробей. Пример: 20/10, 19/1, 18/9, 16/8, 15/5, 14/7, 12/6, 4/2.

Критерии:

Верный ответ без верного примера дробей – 1 балл.

Верный ответ с примером 8 дробей – 3 балла.

Есть идея, что каждое из чисел 11, 13, 17 и 19 могут присутствовать только в одной из сократимых дробей, – еще 2 балла.

(Если присутствует все перечисленное, то осталось только правильно сделать вывод – и получить полные 7 баллов.)

2. Перед уроком Нестор Петрович написал на доске несколько слов. Когда прозвенел звонок на урок, он заметил ошибку в первом слове. Если он исправит в нем ошибку, то слова с ошибками будут составлять 24%, а если вообще сотрет первое слово с доски, то слова с ошибками будут составлять 25%. Сколько процентов от общего количества написанных слов составляли слова с ошибками до звонка на урок?

Ответ: 28%.

Решение:

Пусть до урока на доске было записано n слов, из которых x с ошибками. Если исправить ошибку в первом слове, то слов с ошибками останется $x - 1$ из n, а по условию $x - 1 = 0{,}24n$. Если стереть слово с ошибкой, то слов с ошибками останется $x - 1$ из $n - 1$, а по условию $x - 1 = 0{,}25(n - 1)$. Тогда $0{,}24n = 0{,}25(n - 1)$, откуда $0{,}01n = 0{,}25$.

Тогда $n = 25$, а $x = 0{,}24n + 1 = 0{,}24 \cdot 25 + 1 = 7$.

Значит, до урока слова с ошибками составляли 7/25 от общего количества слов, то есть 28%.

Критерии:

Верный ответ без верного обоснования и без примера, для какого количества слов и слов с ошибками он получен, – 1 балл.

Верный ответ без верного обоснования, но с примером, для какого количества слов и слов с ошибками он получен, – 2 балла.

Подбор подходящего примера слов без обоснования, почему не может быть другого варианта (и если это обоснование не вытекает из решения), баллов к верному ответу не добавляет.

3. От точки O отложили лучи OA, OB, OC и OD, причем $\angle AOB = \angle BOC = \angle COD = 3\angle AOD$. Чему может быть равен $\angle AOD$?

<u>Ответ:</u> 36°, 45°.

Решение:

Заметим, что углы AOB, BOC и COD следуют друг за другом в одном направлении (иначе некоторые лучи совпадали бы).

Пусть $\angle AOD = X$. Тогда $\angle AOB = \angle BOC = \angle COD = 3X$.

Если сумма углов AOB, BOC и COD меньше 360°, получается $9X + X = 360°$, откуда $X = 36°$, если же она больше 360°, получается $9X - X = 360°$, откуда $X = 45°$.

<u>Критерии:</u>

За каждый из верных ответов (без верного обоснования) – по 1 баллу.

Разобран (обоснован) случай, когда сумма углов AOB, BOC и COD меньше 360°, – плюс 2 балла.

Разобран (обоснован) случай, когда сумма углов AOB, BOC и COD больше 360°, – плюс 3 балла.

4. В 1919 году Буратино закопал на Поле Чудес три золотые монетки. Каждый год количество закопанных монет увеличивалось на три, кроме одного очень удачного года, когда количество монет увеличилось сразу в 3 раза. В 2018 году (то есть через 99 лет) Буратино выкопал все золотые монетки. Могло ли их оказаться ровно 456?

<u>Ответ:</u> не могло.

Решение:

<u>Первый способ.</u>

Пусть в течение n лет количество монеток увеличивалось на три (и тогда стало после этого $3 + 3n$), через 1 год сразу увеличилось в 3 раза (и стало $9 + 9n$), а потом снова k лет увеличивалось на 3 (и стало равно $9 + 9n + 3k$). Прошло 99 лет, поэтому $n + 1 + k = 99$, тогда $n + k = 98$.

Но тогда количество монет должно было стать

$9 + 9n + 3k = 9 + 6n + 3(n + k) = 9 + 6n + 3\cdot 98$ – сумма нечетного, четного и четного числа – нечетное число, поэтому не равно 456.

<u>Второй способ.</u>

Каждый год количество монет увеличивалось на 3 (то есть меняло четность: было четным – стало нечетным, или наоборот было нечетным – стало четным), кроме удачного года, когда четность количества монет не изменилась. Стало быть, четность поменялась ровно 98 раз. А раз четность поменялась четное количество раз, а изначально было нечетное количество монет, то и в конце количество монет должно быть нечетным – поэтому не могло быть 456.

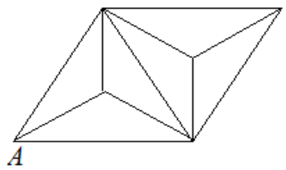
<u>Третий способ.</u>

Чем позже произошел удачный год (утроение количества монет), тем больше монет будет в конце: 98 раз прибавлялось по 3 монеты, а один раз – больше 3 монет (к текущей сумме добавляется удвоенная текущая сумма), причем, чем больше к этому году накопилось, тем больше и прибавится. Если сначала 25 раз прибавлялось по 3 (стало $3 + 25\cdot 3 = 78$ монет), потом наступил хороший год (стало $78\cdot 3 = 234$ монеты), а потом еще 73 раза прибавлялось по

3 монеты (стало $234 + 73 \cdot 3 = 453$ монеты) – будет меньше 456 (а значит будет меньше 456 и в том случае, если хороший год наступил бы еще раньше). А если сначала 26 раз прибавлялось по 3 (уже $3 + 26 \cdot 3 = 81$ монета), потом наступил хороший год (стало $81 \cdot 3 = 243$ монеты), а потом еще 72 раза прибавлялось по 3 монеты (стало $243 + 72 \cdot 3 = 459$ монет) – будет больше 456 монет (а тогда больше 456 было бы и в том случае, когда хороший год наступил бы еще позже).

<u>Критерии:</u>
Верный ответ (что «не могло») без верного обоснования – 0 баллов.
Показано, что при увеличении втрое на 26 году в конце будет стоить 453 монеты, а при увеличении втрое на 27 году в конце будет 459 монет, но не объясняется, почему из этого следует нужный вывод – 2 балла.
То же, плюс соображения монотонности (чем позже произошел удачный год, тем больше в конце будет монет) без обоснования – 4 балла.
Ошибка на единицу из-за неправильного учета краевого эффекта – оценка не выше 3 баллов (как правило, 0 баллов).
Верно составлено, но не решено уравнение в целых числах (не объяснено, почему нет решений, или приведен только его ответ без объяснения, почему других ответов нет) – 3 балла.
На основании нескольких числовых примеров утверждается, что в 2018 году будет нечетное количество монет, но содержательного продвижения в обосновании нет – 1 балл.

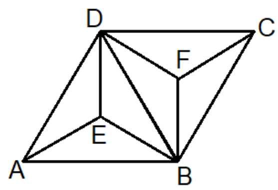
5. Пять прямолинейных дорожек длины a в парке образуют два примыкающих сторонами равносторонних треугольника, а шесть более коротких прямолинейных дорожек длины b соединяют их центры с вершинами (см. рис.). Поливальная машина должна проехать по всем дорожкам и вернуться в начальную точку A. Какой наименьший путь она должна проделать?



<u>Ответ:</u> $6a + 8b$.

Решение:

Обозначим концы дорожек буквами (как на рисунке) и будем называть их вершинами. Заметим, что сколько раз мы вошли в каждую промежуточную вершину (B, C, D, E, F) – столько раз должны из нее выйти (по условию путь заканчивается в вершине A), а из вершины A наоборот – сколько раз вышли из нее, столько раз должны и вернуться (потому что в нее путь начинается и в ней в итоге заканчивается). Но из каждой вершины выходит нечетное число дорожек, поэтому хотя бы по одной из таких дорожек, выходящих из вершины, мы должны пройти хотя бы дважды (будем называть такие дорожки кратными) – и это условие должно выполняться для каждой из 6 вершин. Если кратных дорожек не более двух, то (так как каждая такая дорожка связывает какие-то две вершины) описанное выше условие будет выполняться не более чем для 4 вершин, а тогда будут вершины, где это условие не выполнено. Если кратных дорожек ровно 3, то они не могут быть все короткими: иначе одна обязательно должна выходить из A (это A-E), одна обязательно должна выходить из C (это C-F), остались несвязанными вершины D и B, но их теперь одной короткой дорожкой не связать. Если из трех кратных дорожек одна длинная и две короткие, то существует пример: A-B-C-D-B-F-C-F-D-A-E-B-E-D-A (дважды прошли по F-C, B-E и A-D). Если кратных дорожек 4 или больше, то они в сумме длиннее, чем $a + b + b$ (любые две из них в сумме длиннее a, потому что даже $b + b > a$ – следует из неравенства треугольника, например, для ADE, а остальных не меньше двух – и они в сумме не короче $b + b$).



<u>Критерии:</u>

Верный ответ без верного примера – 0 баллов.
Верный ответ с верными примером обхода – 1 балл.
Доказано, что кратные дорожки должны быть – еще 1 балл.
Доказано, что кратных дорожек не меньше 3, – еще 1 балл.
Доказано, что все три кратные дорожки не могут быть короткими, – еще 1 балл.
Доказано, что вариант, в котором 4 или больше кратных дорожек, не является оптимальным – еще 1 балл (если верно доказано все остальное, при этом получен правильный ответ, а это обоснование пропущено, – ставить 5 баллов).