МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ
2018/2019 УЧЕБНЫЙ ГОД
9 КЛАСС (решения)

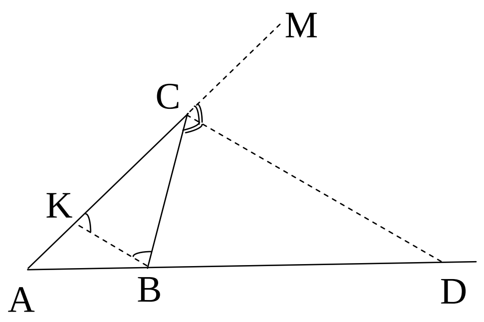
1. (*7 баллов*) Решите уравнение в натуральных числах:

$$x+\frac{1}{y+\frac{1}{z}}=\frac{30}{7}.$$

Решение.
Представим $\frac{30}{7}$ как $4+\frac{2}{7}$. Так как x, y, z – натуральные числа и $y+\frac{1}{z}>1$, то x = 4 и $\frac{1}{y+\frac{1}{z}}=\frac{2}{7}$. Тогда $y+\frac{1}{z}=\frac{7}{2}$, откуда y = 3, z = 2.
Ответ. x = 4, y = 3, z = 2.

2. (*7 баллов*) Биссектриса внешнего угла треугольника ABC при вершине C пересекает прямую AB в точке D. Докажите, что $AD\colon BD=AC\colon BC$.

Решение.

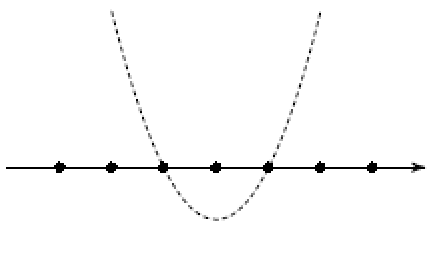


Проведем прямую $BK \parallel CD$, $K \in AC$.

1. $\angle BCD=\angle CBK$ – внутренние накрест лежащие углы;
   $\angle BKC=\angle DCM$ – соответственные углы.
2. CD – биссектриса, $\angle BCD=\angle DCM$, $\angle CBK=\angle BKC$. Следовательно, ΔCKB – равнобедренный, $CK=CB$.
3. По теореме Фалеса $\frac{AD}{BD}=\frac{AC}{CK}$. С учётом равенства сторон $CK=CB$, получим $\frac{AD}{BD}=\frac{AC}{BC}$. Таким образом, $AD\colon BD=AC\colon BC$.

Что и требовалось доказать.

3. (*7 баллов*) На рисунке изображён график приведённого квадратного трёхчлена (ось ординат стёрта, расстояние между соседними отмеченными точками равно 1). Чему равен дискриминант этого трёхчлена?

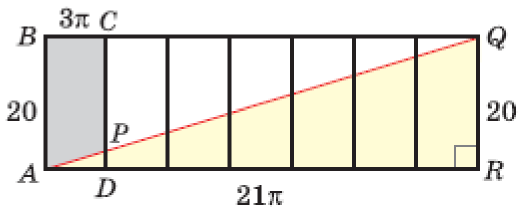


Решение. Пусть x_1 и x_2 - корни данного трёхчлена ($x_1 < x_2$). Из условия следует, что $x_2 - x_1 = 2$. Поскольку $x_2 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2}$, $x_1 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2}$, получаем, что $x_2 - x_1 = \sqrt{D}$, откуда $D = 4$.

Ответ. 4.

4. (*7 баллов*) Вокруг цилиндрической колонны высотой 20 метров и диаметром 3 метра обвита лента, которая поднимается от подножия до вершины семью полными витками. Какова длина ленты?

Решение. Разрезав цилиндр вдоль образующей его боковой поверхности, проходящей через начало ленты, и развернув эту поверхность, получим прямоугольник *ABCD* размером $20 \times 3\pi$ (см. рисунок).



«Приклеив» к нему еще шесть таких же прямоугольников, получим прямоугольник *ABQR*. На этой развёртке первый виток ленты предстанет в виде отрезка *AP*, а вся лента развернётся в диагональ *AQ* прямоугольника *ABQR*.

Значит, её длина $l = AQ = \sqrt{RQ^2 + AR^2} = \sqrt{20^2 + (21\pi)^2} = \sqrt{400 + 441\pi^2} \approx 68{,}9$ (метров).

Комментарий. Отметим, что находить приближённое значение длины ленты от учащихся не требуется.

5. (*7 баллов*) Докажите, что выражение $5x^2 + 5y^2 + 5z^2 + 6xy - 8xz - 8yz$ является положительным, при условии, что $x^2 + y^2 + z^2$ не обращается в нуль.

Решение.

Вынесем за скобку множитель 5: $5\left(x^2 + y^2 + z^2 + \frac{6}{5}xy - \frac{8}{5}xz - \frac{8}{5}yz\right)$.

Оценим знак выражения в скобках. Для этого выделим полный квадрат при переменной *x*, а затем при переменной *y*:

$$x^2 + y^2 + z^2 + \frac{6}{5}xy - \frac{8}{5}xz - \frac{8}{5}yz = x^2 + 2x\left(\frac{3}{5}y - \frac{4}{5}z\right) + \left(z^2 - \frac{8}{5}yz + y^2\right) =$$

$$=\left(x^2+2x\left(\frac{3}{5}y-\frac{4}{5}z\right)+\left(\frac{3}{5}y-\frac{4}{5}z\right)^2\right)+\left(z^2-\frac{8}{5}yz+y^2-\left(\frac{3}{5}y-\frac{4}{5}z\right)^2\right)=$$

$$=\left(x+\frac{3}{5}y-\frac{4}{5}z\right)^2+\frac{16}{25}y^2-\frac{16}{25}yz+\frac{9}{25}z^2=$$

$$=\left(x+\frac{3}{5}y-\frac{4}{5}z\right)^2+\frac{16}{25}\left(y-\frac{z}{2}\right)^2-\frac{4}{25}z^2+\frac{9}{25}z^2=$$

$$=\left(x+\frac{3}{5}y-\frac{4}{5}z\right)^2+\frac{16}{25}\left(y-\frac{z}{2}\right)^2+\frac{z^2}{5}.$$

Данное выражение представляет собой сумму квадратов. Следовательно, оно является неотрицательным. Необходимо исключить возможность равенства нулю данного выражения. Это возможно, если каждый квадрат обращается в нуль:

$$\frac{z^2}{5}=0, \text{ то есть } z=0;$$

$$\left(y-\frac{z}{2}\right)^2=0, \text{ с учётом } z=0, \text{ получим } y=0;$$

$$\left(x+\frac{3}{5}y-\frac{4}{5}z\right)^2=0, \text{ так как } z=0, y=0, \text{ имеем } x=0.$$

Но по условию $x^2+y^2+z^2$ не обращается в нуль, поэтому исключаем возможность равенства нулю исходного выражения.

Таким образом, выражение $5x^2+5y^2+5z^2+6xy-8xz-8yz$ является положительным.

Что и требовалось доказать.