Муниципальный этап
Всероссийской олимпиады школьников
по математике
в 2018 – 2019 учебном году

Ответы и решения

Общие положения

1) Максимальная оценка за каждую задачу — 7 баллов.

2) 7 баллов ставится за безукоризненное решение задач; 6 баллов означает, что в решении допущена мелкая погрешность, например, не разобран частный случай, не влияющий на решение. 4 или 5 баллов означают, что все идеи, необходимые для решения найдены, задачу в целом надо считать решённой, однако приведённое решение имеет существенные недостатки, например, в доказательстве ключевого факта имеются пробелы, устранимые не совсем очевидным образом. 2 — 3 балла ставится, если в решении задачи имеется серъёзное продвижение, однако для решения необходимы дополнительные идеи, не указанные в решении. 1 балл означает, что в решении имеется только очень мелкое продвижение, как то: замечен, но не доказан ключевой факт, разобран нетривиальный частный случай или приведён (но не обоснован) верный ответ, который не вполне тривиален. Если приведённые в решении факты, идеи, выкладки к решению явным образом не ведут, то задача оценивается в 0 баллов, также как и в случае, когда решение задачи отсутствует.

3) В случае наличия в одной работе нескольких решений оценивается ровно одно решение, то, которое приносит больше баллов. За другие решения баллы не снимаются и не начисляются.

4) Оценка за задачу не может быть снижена за неаккуратный почерк, ошибки в русском языке, или явные описки в выкладках. Также недопустимо снижение баллов за не чёткий чертёж в геометрической задаче или даже за отсутствие такового. Нельзя требовать с участника олимпиады, чтобы он переписывал условие задачи, в том числе не обязательна краткая запись условия геометрических задач.

5) Школьник имеет право сам выбрать способ решения той или иной задачи; не допускается снижать оценку за то, что выбранный школьником способ решения не самый лучший или отличается от предложенных нами способов.

6) Факты и теоремы школьной программы (в том числе и те, которые приведены только в задачах школьных учебников) следует принимать без доказательств. Школьник имеет право без доказательства использовать любые такие факты, даже если они проходятся в более старших классах. Допускается (также без доказательств) использование математических фактов, изучающихся на факультативах. В частности, без ограничения можно применять формулы аналитической геометрии, математического анализа, принцип математической индукции, теоремы теории графов и т.п.

7) Критерии оценки, приведённые в прилагаемых решениях (таблица в конце решения каждой задачи) являются обязательными и не могут быть изменены. Однако это не означает, что выставляемые за задачу баллы обязательно должны совпасть с приведёнными в таблице: в случае, когда жюри вырабатывает дополнительные критерии (см. следующий пункт) жюри может выставить балл, которого в таблице нет (например, в таблице предусмотрены только 0 и 7 баллов, а

жюри выставляет 5 баллов). Таблицы критериев составлены таким образом, что перечисляют отдельные случаи; накопление баллов за разные пункты не предусмотрено.

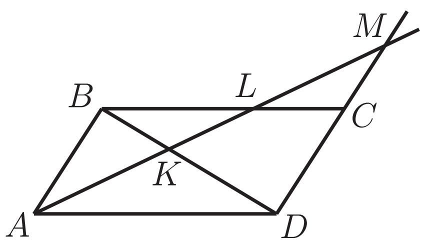
8) В случае, если решение школьника принципиально отличается от решений, предложенных программным комитетом, и не может быть подведено под предлагаемые критерии, проверяющие вырабатывают критерии самостоятельно в соответствии с пунктом 2.

9) В случае возникновения спорных ситуаций при проверке работ олимпиады жюри вправе обратиться за разъяснениями и советом к составителям пакета заданий: д.ф-м.н. Валерию Трифоновичу Шевалдину и к.ф-м.н. наук Сергею Эрнестовичу Нохрину (адрес эл.почты **varyag2@mail.ru**, тел. +**79220350324**).

Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике в 2018 – 2019 учебном году 9 класс

Время выполнения заданий — 4 часа

9.1. *На диагонали BD параллелограмма $ABCD$ взята точка K. Прямая AK пересекает прямые CD и BC соответственно в точках L и M. Докажите, что $AK^2 = KL \cdot KM$.*



К решению задачи 9.1

Решение: Без ограничения общности считаем, что точка L лежит на стороне AM (а не на её продолжении) — см. рисунок. Подобие треугольников BKA и DKM даёт равенство $AK/BK = KM/KD$. Подобие треугольников BKL и DKA даёт равенство $AK/DK = KL/KB$. Перемножим левые и правые части этих равенств и получим требуемое.

<u>*Рекомендации по проверке:*</u>

есть в работе	баллы
Верное доказательство	7 баллов
Из двух случаев (луч AK пересекает сторону BC и луч AK пересекает сторону DC) рассмотрен только один	баллов не снижать
Указаны оба подобия $\Delta BKA \sim \Delta DKM$ и $\Delta BKL \sim \Delta DKA$	5 баллов
В верном доказательстве использованы неочевидные и недоказанные утверждения	3 балла
Указано одно из подобий $\Delta BKA \sim \Delta DKM$ и $\Delta BKL \sim \Delta DKA$	2 балла
Утверждение доказано в частных случаях (например, в случае прямоугольника)	1 балл
Утверждения (неважно, доказанные или нет), которые не ведут к решению	0 баллов

9.2. *Решите систему уравнений*

$$\begin{cases} 10x^2 + 5y^2 - 2xy - 38x - 6y + 41 = 0, \\ 3x^2 - 2y^2 + 5xy - 17x - 6y + 20 = 0. \end{cases}$$

Решение: Избавимся от произведения xy. Например, умножим первое уравнение на 5, второе — на 2 и сложим левые и правые части полученных уравнений. У нас получится $56x^2 + 21y^2 - 224x - 42y + 245 = 0$. Сократим уравнение на 7, а затем выделим полные квадраты при x и при y. Имеем $8(x-2)^2 + 3(y-1)^2 = 0$, откуда $x = 2$, $y = 1$. Проверкой убедимся, что найденная пара чисел действительно решение.

Ответ: $x = 2$, $y = 1$.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	**баллы**
Верный и полностью обоснованный ответ	7 баллов
Обосновано получена пара $x = 2$ $y = 1$ (то есть доказано, что другие пары (x, y) не являются решениями), но нет проверки, что она решает систему	4 балла
Верными преобразованиями получено уравнение, не содержащее произведения xy; иных продвижений нет	2 балла
Ответ без обоснования или с проверкой, что пара $x = 2$, $y = 1$ — решение	1 балл
преобразования, не ведущие к решению	0 баллов

9.3. *Пусть для некоторых целых чисел a, b, c выполнено следующее равенство: $|a+b+c| + 2 = |a| + |b| + |c|$. Докажите, что в этом случае хотя бы одно из чисел a^2, b^2, c^2 равно 1.*

Решение: Если все числа одного знака, то $|a+b+c| = |a|+|b|+|c|$, и равенство не выполнено. Без ограничения общности, пусть a и b — одного знака, c — другого. Тогда

$$|a+b+c| = (|a| + |b|) - |c| = |a| + |b| - |c|$$

или

$$|a+b+c| = -(|a| + |b|) + |c| = -|a| - |b| + |c|.$$

В первом случае с учётом исходного равенства имеем $|c| = 1$, и всё доказано. Во втором случае, опять же с учётом исходного равенства, получим $|a| + |b| = 1$, и, в силу того, что $|b|$ и $|a|$ — числа целые и неотрицательные, одно из них равно 0, а второе 1.

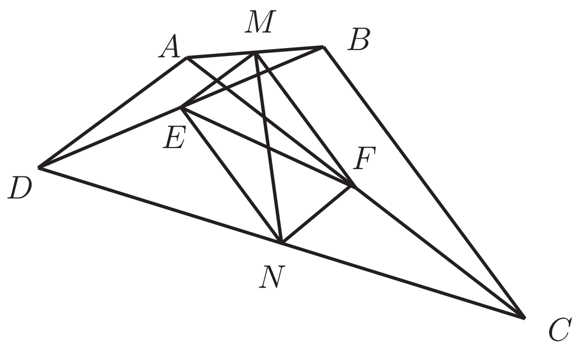
Примечание 1: Можно организовать разбор случаев и иначе.

Примечание 2: Считаем, что равенства $|x+y| = |x| + |y|$ для чисел одного знака и $|x+y| = \big||x| - |y|\big|$ для чисел разного знака считаются известными и не требуют доказательства.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Верное доказательство	7 баллов
Верно разобраны некоторые (не все) бесконечные серии возможных значений (например, все числа положительны)	2 балла
Утверждение проиллюстрировано конечным числом примеров	0 баллов

9.4. *Расстояние между серединами сторон AB и CD выпуклого четырехугольника $ABCD$ равно расстоянию между серединами его диагоналей. Найдите угол, образуемый прямыми AD и BC при их пересечении. Ответ обоснуйте.*



К решению задачи 9.4

Решение: Четырежды применим теорему о средней линии треугольника и получим, что 1) $EM = AD/2 = FN$; 2) $FM = BC/2 = EN$ (точки M, N, E, F — соответственно середины отрезков AB, CD, DB, AC). Значит, четырёхугольник $EMFN$ — параллелограмм. По условию его диагонали равны, а значит этот параллелограмм — не что иное, как прямоугольник. Так как угол между прямыми AD и BC равен углу EMF прямоугольника, он равен $90°$.

Ответ: $90°$.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Верный и полностью обоснованный ответ	7 баллов
Доказано, что четырёхугольник $EMFN$ — параллелограмм	4 балла
Применена (хотя бы один раз) теорема о средней линии треугольника	2 балла
Ответ без обоснования и/или неверный ответ	0 баллов

9.5. *Старший брат взял у Миши одинаковые неокрашенные кубики и сложил из них большой куб. После этого некоторые (не все) грани большого куба он полностью покрасил в красный цвет. Когда краска высохла, Миша разобрал большой куб и обнаружил, что ровно у 343 маленьких кубиков нет ни одной красной грани. Сколько граней большого куба покрасил брат Миши? Ответ обоснуйте.*

Решение: Будем называть маленький кубик, у которого есть красная грань, *окрашенным*. Размер большого куба больше 7 (так как только неокрашенных кубиков

$343 = 7^3$, а есть ещё и окрашенные), но меньше 9 (так как «внутренних» кубиков — они все не окрашены — не больше 7^3). Значит, он равен 8. Из $8^3 = 512$ кубиков, его составляющих, $6^3 = 216$ — «внутренние». Осталось $343-216 = 127$ неокрашенных кубиков, которые лежат на границе большого куба. Каждая неокрашенная грань даст 36 таких кубиков (внутренний квадрат 6×6), поэтому неокрашенных граней меньше четырёх. Докажем, что их по крайней мере три. Действительно, если их меньше, то все угловые кубики окрашены, и неокрашенных кубиков границы — чётное количество. Значит, не окрашены три грани, имеющие общую вершину. Проверим, что куб $8\times 8\times 8$ с тремя неокрашенными попарно смежными гранями подходит. В нём неокрашенных кубиков $3\cdot 6^2 = 108$ (внутренние кубики граней) плюс $3\cdot 6 = 18$ — кубики на общем ребре двух неокрашенных граней плюс один угловой — ровно 127 кубиков.

Ответ: 3 грани.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Верный и полностью обоснованный ответ	7 баллов
Доказано, что грани может быть только 3, но не показано, что описанная ситуация возможна	6 баллов
Обосновано, что куб имеет размер $8\times 8\times 8$, но не доказано, что число окрашенных граней не может отличаться от 3	4 балла
Верный ответ и пример куба и раскраски, но не обоснована его единственность	2 балла
Ответ без обоснования и/или неверный ответ	0 баллов

9.6. *В комнате находятся* 30 *человек; каждый либо рыцарь (говорит исключительно правду), либо лжец (правду не говорит никогда). Каждый из них сделал заявление: «В этой комнате столько же лжецов, сколько и людей, имеющих тот же цвет глаз, как у меня.» Сколько лжецов в комнате? Приведите все варианты ответа и докажите, что других нет.*

Решение: Хотя бы один лжец в комнате есть, поскольку для любого рыцаря есть хотя бы один человек, имеющий тот же цвет глаз — сам этот рыцарь. Пусть в комнате x лжецов ровно (x — натуральное число). Заметим, что если у двух человек один и тот же цвет глаз, то они говорят либо оба правду, либо оба ложь. Значит, невозможна ситуация, когда у лжеца и у рыцаря глаза одного цвета. Разделим всех людей на группы. В одну отрядим всех лжецов, а рыцарей разделим на группы по цвету глаз. Тогда в каждой из групп рыцарей ровно x человек — это следует из заявления любого из рыцарей этой группы. Если всего групп рыцарей n, получаем равенство $(n+1)\cdot x = 30$. Тогда количество лжецов x есть делитель 30. Кроме того, невозможна ситуация, когда цвет глаз у всех лжецов один и тот же — иначе они говорят правду. Значит, $x > 1$. Других ограничений нет: если x — делитель 30, отличный от 1, то всех людей можно поделить на $\frac{30}{x}$ групп по x человек в каждой (не запрещается и ситуация $x = 30$, при этом получится одна группа). Цвет глаз людей из разных групп пусть различен, а в каждой группе, кроме одной цвет глаз участников один и тот же. И пусть в этой особой группе все лжецы, а других лжецов нет. Условие при этом выполнено.

Ответ: 2, 3, 5, 6, 10, 15 или 30.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	**баллы**
Верный и полностью обоснованный ответ	7 баллов
Не разобран случай, когда лжецов нет совсем	баллы не снижать
Обосновано, что количество лжецов не равно 1	добавить 1 балл, если решение не полное
Доказано, что число лжецов есть делитель 30 и построены примеры для всех возможных случаев	6 баллов
Доказано, что число лжецов есть делитель 30, но не все возможные примеры построены	3 балла
Верно найдены все значения количества лжецов, но не доказано, что других нет	2 балла
Верно найдены некоторые возможные значения (не все) количества лжецов	1 балл
Ответ без обоснования и/или неверный ответ	0 баллов