

**Муниципальный этап
Всероссийской олимпиады школьников
по математике
2018/19 учебный год
11 класс**

Дорогой друг! Желаем успеха!

Инструкция для учащихся

Олимпиада по математике состоит из 6 заданий. На выполнение олимпиады отводится 4 астрономических часа. Каждое задание оценивается в 7 баллов, решение задания необходимо расписать подробно. Задания можно выполнять по своему усмотрению. Если задание не удастся выполнить сразу, перейдите к следующему. Если останется время, вернитесь к пропущенным заданиям.

Калькулятором, справочной литературой пользоваться нельзя!

Задания (максимальный балл за всю работу – 42)

1. Известно, что $a^2 + ab + b^2 = 1$. Докажите, что $a^3 + b = b^3 + a$.
2. «Как-то во время игры в шахматы у меня осталось фигур и пешек в 3 раза меньше, чем у соперника, и в 6 раз меньше, чем свободных клеток на доске, но я все равно выиграл эту партию!» – рассказывал однажды Иван Иванов. Стоит ли ему верить?
3. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с ребром 1. Прямая l проходит через точку E , середину ребра $C_1 D_1$, и пересекает прямые AD_1 и $A_1 B$. Найдите расстояние от точки E до точки пересечения прямой l с прямой $A_1 B$.
4. Два двузначных числа, записанных одно за другим, образуют четырехзначное число, которое делится на их произведение. Найти эти числа.
5. Сосновый лес растет на участке, имеющем форму квадрата со стороной 1 км. Зная, что весь этот лес состоит из 4500 деревьев диаметра 50 см, доказать, что в лесу можно выбрать прямоугольную площадку $10 \text{ м} \times 20 \text{ м}$, на которой не растет ни одно дерево.
6. Можно ли нарисовать на плоскости 2005 ненулевых векторов так, что из любых десяти из них можно выбрать три с нулевой суммой?