



САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ  
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ  
РАЙОННЫЙ ЭТАП  
ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ  
17 НОЯБРЯ 2018 г. I тур 9 класс 1 вариант

---

1.  $f(x)$  — квадратный трехчлен с положительным старшим коэффициентом. Наименьшее значение квадратного трехчлена  $f(2x) - f(x)$  равно  $-1$ . Найдите наименьшее значение квадратного трехчлена  $f(3x) - f(x)$ .

2. Дано натуральное число  $n$ . В белой таблице  $1000n \times 1000n$  некоторые клетки покрашены в черный цвет. Известно, что при любом натуральном  $k$ , таком что  $n^2 \leq k \leq n^2 + n - 1$ , в каждом клетчатом прямоугольнике площади  $k$  есть хотя бы одна черная клетка. Докажите, что в любом клетчатом прямоугольнике площади  $n^2 + n$  тоже есть черная клетка.

3. Найдите наименьшее натуральное число  $N$ , у которого существует три *различных* натуральных делителя, произведение которых равно  $14^{600}$ .

4. В остроугольном треугольнике  $ABC$  проведены высоты  $BD$  и  $CE$ . Точка, симметричная точке  $E$  относительно прямой  $BD$ , лежит на описанной окружности треугольника  $ABC$ . Найдите отношение  $AD : CD$ .

5. Найдите все значения, которые может принимать выражение

$$[x] \cdot \left[ \frac{2000}{x} \right]$$

при положительных  $x$ . (Как обычно, через  $[a]$  обозначается целая часть числа  $a$ , т. е. наибольшее целое число, не превосходящее  $a$ .)

---

*Этот листок Вы можете оставить себе на память. В начале своей работы НЕ ЗАБУДЬТЕ указать о себе (БОЛЬШИМИ ПЕЧАТНЫМИ БУКВАМИ) следующие данные:*

ФАМИЛИЯ, ИМЯ; ТЕЛЕФОН; КЛАСС, ШКОЛА, РАЙОН ШКОЛЫ;  
ФИО тех учителей математики, которые оказали на Вас наибольшее влияние.  
Списки прошедших на городской и региональный тур будут опубликованы на сайтах [www.pdmi.ras.ru/~olymp](http://www.pdmi.ras.ru/~olymp) и [www.anichkov.ru/olimpus/matem](http://www.anichkov.ru/olimpus/matem)



САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ  
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ  
РАЙОННЫЙ ЭТАП  
ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ  
17 НОЯБРЯ 2018 г. I тур 9 класс 2 вариант

---

1.  $f(x)$  — квадратный трехчлен с положительным старшим коэффициентом. Наименьшее значение квадратного трехчлена  $f(3x) - f(2x)$  равно  $-1$ . Найдите наименьшее значение квадратного трехчлена  $f(2x) - f(x)$ .

2. Дано натуральное число  $n$ . В белой таблице  $1000n \times 1000n$  некоторые клетки покрашены в черный цвет. Известно, что при любом натуральном  $k$ , таком что  $n^2 - 2n + 1 \leq k \leq n^2 - n - 1$ , в каждом клетчатом прямоугольнике площади  $k$  есть хотя бы одна черная клетка. Докажите, что в любом клетчатом прямоугольнике площади  $n^2 - n$  тоже есть черная клетка.

3. Найдите наименьшее натуральное число  $N$ , у которого существует три *различных* натуральных делителя, произведение которых равно  $22^{300}$ .

4. В остроугольном треугольнике  $ABC$  проведены высоты  $BD$  и  $AE$ . Точка, симметричная точке  $D$  относительно прямой  $AE$ , лежит на описанной окружности треугольника  $ABC$ . Найдите отношение  $CE : BC$ .

5. Найдите все значения, которые может принимать выражение

$$[1000x] \cdot \left[ \frac{1}{x} \right]$$

при положительных  $x$ . (Как обычно, через  $[a]$  обозначается целая часть числа  $a$ , т. е. наибольшее целое число, не превосходящее  $a$ .)

---

*Этот листок Вы можете оставить себе на память. В начале своей работы НЕ ЗАБУДЬТЕ указать о себе (БОЛЬШИМИ ПЕЧАТНЫМИ БУКВАМИ) следующие данные:*

ФАМИЛИЯ, ИМЯ; ТЕЛЕФОН; КЛАСС, ШКОЛА, РАЙОН ШКОЛЫ;  
ФИО тех учителей математики, которые оказали на Вас наибольшее влияние.  
Списки прошедших на городской и региональный тур будут опубликованы на сайтах [www.pdmi.ras.ru/~olymp](http://www.pdmi.ras.ru/~olymp) и [www.anichkov.ru/olimpus/matem](http://www.anichkov.ru/olimpus/matem)