10 класс.

1. Найти все пары действительных чисел (x, y), для которых выполняется равенство $\sqrt{x^2+y^2-1}=1-x-y$.

Ответ: подходят все пары чисел (1, t), (t, 1), где t – любое неположительное число.

Указание. Возведя в квадрат и разложив на множители, получим, что x=1 или y=1. Квадратный корень неотрицателен, поэтому сумма 1–x–y≥0. Подставив в это неравенство возможное значение переменной, получим, что другая переменная при этом не положительна.

Критерии. Не учтено, что арифметический корень неотрицателен: 3 балла.
Потерян один из наборов пар: 1 балл.

2. a^3+1 делится на b, и b^2+1 делится на a, где a, b– целые числа. Доказать, что a^3+b^2+1 делится на ab.

Указание. Данные делимости влекут равенства $a^3+1 = nb$ и $b^2+1 =ma$, где m,n – целые числа. Перемножив эти равенства, получим $a^3b^2+a^3+b^2+1=nmab$. Отсюда следует, что левая часть делится на ab. Поскольку первое слагаемое левой части делится на ab, то a^3+b^2+1 тоже делится на ab.

Критерии. Не доказана взаимная простота чисел a и b в тех решениях, в которых она используется: 2 балла.

3. Пусть R (n) обозначает сумму остатков, когда n делится на 1, 2, …, n соответственно. Докажите, что $n^2/10 < R(n)$ для каждого целого $n \geq 7$.

Указание. Разобьём доказательство на два случая, когда n – чётно и n – нечётно.

Случай 1. Пусть n=2k, k≥4. Тогда 2k=2(k–1)+2, k–1 не делит 2k. Рассматривая последовательно деление на k–1, k, k+1,…,2k–1 найдём, что $R(n)=R(2k)\geq 2+0+(k-1)+(k-2)+\ldots+2+1=k(k-1)/2+2=(n^2-2n+16)/8= n^2/10+((n-5)^2+55)/40\geq n^2/10$.

Случай 2. Пусть n=2k+1, k≥2. Рассматривая последовательно деление на k, k+1,…,2k, найдём для n≥5, что $R(n)=R(2k+1)\geq 1+k+(k-1)+(k-2)+\ldots+2+1=k(k+1)/2+1=(n^2-1)/8+1= (n^2+7)/8=n^2/10+(n^2+35)/40>n^2/10$.

Критерии. Рассуждение разбито на два случая (четный и нечётный) и верно сделаны оценки остатков, но выкладки не доведены до конца: 2 балла.

4. Найти все функции f, определённые на множестве действительных чисел и принимающие действительные значения, такие что $2f(x)+2f(y)-f(x)f(y)\geq 4$ для всех действительных x, y.

Ответ: f(x)=2 (постоянная функция, все значения которой равны 2).

Указание. Положив в неравенстве y=x и упростив, получим $f^2(x)-4f(x)+4\leq 0$ или $(f(x)-2)^2\leq 0$. Откуда имеем, что f(x)=2. Проверкой убеждаемся, что эта функция подходит.

Критерии. Если нет проверки, то снимется один балл.

5.Трёхзвенная ломаная ABCD такова, что углы между соседними звеньями не меньше 120°. Доказать, что длина ломаной меньше суммы длин отрезков AC и DB.

Указания. Пусть AB=a, BC=b, CD=c, AC=m, BD=n, $\angle ABC=\beta\geq 120°$, $\angle BCD=\gamma\geq 120°$. По теореме косинусов для треугольника ABC имеем $m^2=a^2+b^2-2ab\cos\beta\geq a^2+b^2-2ab\cos 120°= a^2+b^2+ab>(a+b/2)^2$. Значит, m>a+b/2. Аналогично доказывается, что n>c+b/2. Сложив эти неравенства, получим n+m>a+b+c.

Критерии. Рассмотрение частных случаев: 0 баллов.

6. В доме творчества 21 кружок. Их посещают 100 школьников, причём каждый ходит только в один кружок. Среди них 15 девочек, каждая знакома с 29 другими школьниками, и 85 мальчиков, каждый из которых знаком с 89 школьниками. Доказать, что найдётся кружок, в котором все между собой знакомы.

Указание. Если предположить, что в каждом кружке есть пара незнакомых школьников, то хотя бы в 21-15=6 кружках будет пара незнакомых мальчиков. Каждая девочка незнакома, по крайней мере, с 70–14=56 мальчиками. Значит, пар незнакомых мальчика с девочкой не менее $15 \cdot 56=840$. С другой стороны, 12 мальчиков незнакомы не более чем с 9 девочками, а остальные 73 – не более чем с 10 девочками. Значит, пар незнакомых девочки с мальчиком не более 108+730=838. Противоречие.

Критерии. Замечено, что есть шесть пар незнакомых мальчиков: 1 балл.