10-й класс

10.1 Докажите, что если a и b положительные числа, то хотя бы одно из чисел a, b^2 и $\frac{1}{a^2+b}$ больше 0,7.

Решение: Пусть $a \le 0{,}7$ и $b^2 \le 0{,}7$. Тогда

$$a^2+b \le 0{,}7^2+\sqrt{0{,}7}, \quad \frac{1}{a^2+b} \ge \frac{1}{0{,}49+\sqrt{0{,}7}}.$$

Остается проверить, что $\frac{1}{0{,}49+\sqrt{0{,}7}} > 0{,}7$, т.е. что $0{,}7\sqrt{0{,}7} < 0{,}657$, т.е. что $0{,}49 \cdot 0{,}7 < 0{,}657^2$, т.е. что $0{,}343 < 0{,}657^2$. Но верно даже, что $0{,}343 < 0{,}6^2$.

10.2 Придумайте такой квадратный трехчлен *f*, что уравнение $f(x^2+1) = f(x)$ имеет единственное решение.

Решение: Будем искать в качестве *f* приведенный трехчлен: $f(x) = x^2 + px + q$. Имеем:

$$f(x^2+1) = (x^2+1)^2 + p(x^2+1) + q = x^2 + px + q = f(x),$$
$$(x^2+1)^2 - x^2 + p(x^2+1) - px = 0,$$
$$(x^2-x+1)(x^2+x+1)^2 + p(x^2-x+1) = 0,$$
$$(x^2-x+1)(x^2+x+1+p) = 0.$$

Так как $x^2-x+1>0$ при всех x, то получаем равносильное исходному уравнение

$$x^2+x+1+p=0.$$

Оно имеет единственное решение, только если его дискриминант равен нулю:

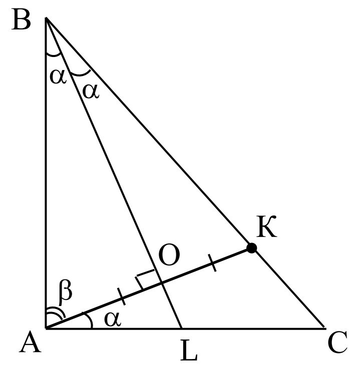
$$1-4(1+p)=0, \quad p=-\frac{3}{4}.$$

Т.о. в качестве требуемого f следует взять трехчлен

$f(x) = x^2 - \frac{3}{4}x + q$ (q – произвольно).

10.3 На стороне BC треугольника ABC лежит точка K такая, что угол CAK составляет половину угла B и точка пересечения O отрезка AK с биссектрисой BL угла B делит этот отрезок на две равные части. Докажите, что $\mathrm{AO} \cdot \mathrm{LC} = \mathrm{BC} \cdot \mathrm{OL}$.

Решение: См.рис.



В треугольнике ABK биссектриса BO является, по условию, и медианой. Тогда треугольник ABK оказывается равнобедренным $(AB = BK)$, а BO – высотой.

Из треугольника AOB получаем $\alpha + \beta = 90^o$. Но тогда угол A, который равен $\alpha + \beta$, – прямой. Прямоугольные треугольники AOL и BAL подобны (по углу α), поэтому $\frac{AO}{OL} = \frac{AB}{AL}$.

Кроме того, по свойству биссектрисы имеем $\frac{AB}{AL} = \frac{BC}{LC}$. Следовательно, $\frac{AO}{OL} = \frac{BC}{LC}$, т.е. $AO \cdot LC = BC \cdot OL$.

10.4 На ЕГЭ по математике 333 ученика допустили в общей сложности 1000 ошибок. Докажите, что при этом учеников, сделавших более чем по 5 ошибок, оказалось не больше, чем учеников, сделавших менее чем по 4 ошибки.

Решение: Пусть x – число учеников, сделавших не менее 6 ошибок, а y_k – число учеников, сделавших ровно k ошибок, $k = 5,4,3,2,1,0$. По условию задачи имеем

$$x + y_5 + y_4 + y_3 + y_2 + y_1 + y_0 = 333 \qquad (1)$$

$$6x + 5y_5 + 4y_4 + 3y_3 + 2y_2 + y_1 \le 1000 \qquad (2)$$

Из (2) получаем $6x \le 1000$, откуда $x \le 166$ (так как x – целое число), $2x \le 332$.

Равенство (1) умножим на 4 и из получившегося равенства вычтем неравенство (2):

$$-2x - y_5 + y_3 + 2y_2 + 3y_1 + 4y_0 \ge 4 \cdot 333 - 1000 = 332.$$

Отсюда выводим неравенство

$$y_3 + 2y_2 + 3y_1 + 4y_0 \ge 332 + 2x \ge 2x + 2x = 4x.$$

Тем более справедливо неравенство

$$4y_3 + 4y_2 + 4y_1 + 4y_0 \ge 4x,$$

т.е.

$$y_3 + y_2 + y_1 + y_0 \ge x,$$

а именно это и требовалось доказать.

10.5 Докажите, что если x и y – натуральные числа, большие единицы, и число $x^2 + xy - y$ является квадратом натурального числа, то число $x + y + 1$ – составное.

Решение: Пусть $x^2 + xy - y = n^2$, $p = x + y + 1$. Имеем: $p \ge x + 2 + 1 = x + 3$ и $y = p - x - 1$. Тогда $n^2 = x^2 + x(p - x - 1) - (p - x - 1) = xp - p + 1$, т.е.

$p(x-1)=n^2-1=(n-1)(n+1).$

Предположим, что p – простое число. Тогда одно (и только одно) из чисел $n-1$ и $n+1$ делится на p.

Пусть, например, $n+1$ делится на p: $n+1=ap,$ где a – натуральное число. Получаем $p(x-1)=(ap-2)ap,$ т.е. $x-1=(ap-2)a,$ откуда $x-1\geq p-2,$ $x+1\geq p$. Но у нас $p\geq x+3$. Получается противоречие.

Аналогично, если $n-1$ делится на $p,$ $n-1=ap,$ то

$x-1=a(ap+2)\geq p+2\geq x+3+2=x+5$ – противоречие.

Т.о. число p непременно должно быть составным.