Муниципальный этап Всероссийской олимпиады по математике
2018-2019 уч.год

10 класс

Решения и ответы

1. На доске написана таблица, содержащая 100 столбцов и 2 строки. Саша и Женя по очереди заполняют по одной клетке таблицы, вписывая -1 или 1. Первый ход делает Саша. После того, как таблица полностью заполнена, для каждой строки вычисляются произведения всех 100 чисел, стоящих в этой сроке. Аналогично для каждого столбца вычисляются произведения двух чисел, стоящих в этом столбце. Может ли Женя делать свои ходы таким образом, чтобы в заполненной таблице сумма вычисленных произведений чисел в строках равнялась -2, а сумма всех вычисленных произведений чисел в столбцах равнялась 0?
Решение. Рассмотрим пары клеток таблицы в каждом ряду, где в каждую пару войдет клетка с нечетным и четным номером. Выигрышная стратегия Жени – предоставить Саше возможность сделать первый ход в каждую такую пару. Пусть Саша заполнит одну (любую) из двух клеток. В ответ Жене нужно заполнить вторую клетку пары по следующему правилу. В первой паре верхней строки Жене следует поставить такое же число, какое поставит Саша. В приведенной ниже таблице это указано как пара $|y|y|$. Во всех парах верхней строки, кроме первой, Жене следует написать число, противоположное поставленному Сашей. В приведенной ниже таблице это указано как пара $|x|-x|$. В нижней строке пары заполнются наоборот - первая пара после заполнения должна содержать два противоположных числа $|x|-x|$, все остальные пары, кроме первой, должны содержать одинаковые числа $|y|y|$. Очевидно, Женя всегда сможет сделать нужный ход в каждой паре. После расстановки -1 и 1 в соответствии с этой стратегией в каждой строке окажется нечетное число минус единиц, произведение чисел в строке будет равно -1. Сумма произведений в строках будет равна -2. В соседних нечетном и четном столбцах произведения чисел окажутся противоположными, и сумма этих произведений будет нулевой.

y	y	x	$-x$	x	$-x$	$\dots$	x	$-x$	x	$-x$
x	$-x$	y	y	y	y	$\dots$	y	y	y	y

Ответ. Может.

2. Известно, что $a < b < c$. Докажите, что уравнение
$$3x^2 - 2(a+b+c)x + ab + bc + ac = 0$$
имеет два различных корня x_1 и x_2, причем $a < x_1 < b$, $b < x_2 < c$.
Решение. Рассмотрим функцию $f(x) = 3x^2 - 2(a+b+c)x + ab + bc + ac$ и подставим в нее по очереди значения $x = a$, $x = b$, $x = c$.
$$f(a) = 3a^2 - 2(a+b+c)a + ab + bc + ac = a^2 - ab - ac + bc = (a-b)(a-c)$$
С учетом неравенства, данного в условии, $f(a) > 0$.
Аналогично,
$$f(b) = 3b^2 - 2(a+b+c)b + ab + bc + ac = b^2 - ab - bc + ac = (b-a)(b-c)$$

$f(b) < 0$.

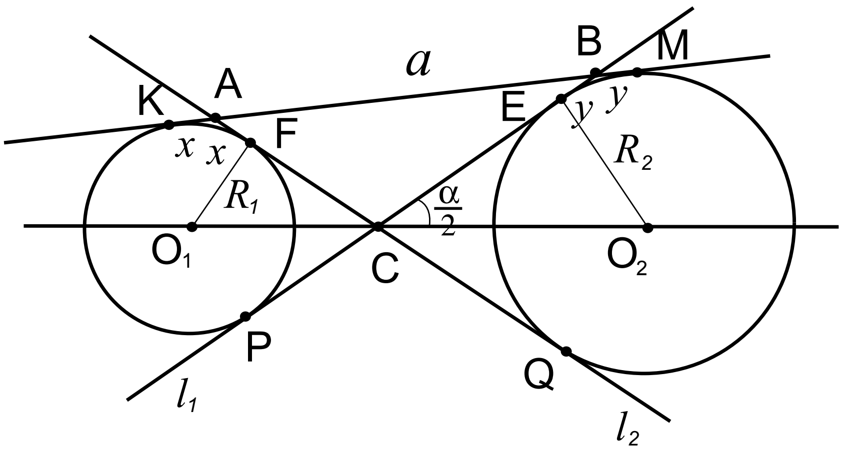
$$f(c) = 3c^2 - 2(a+b+c)c + ab + bc + ac = c^2 - ac - bc + ab = (c-a)(c-b)$$

$f(c) > 0$.
Так как квадратичная функция принимает значения разных знаков в точках a и b, то между этими точками функция имеет корень. Аналогично она имеет корень, расположенный между точками b и c. Так как рассматриваемое уравнение - квадратное, то оно не может иметь более двух корней. Утверждение доказано.
Добавление. Уравнение путем группировки сразу может быть свернуто к виду

$$(x-a)(x-b) + (x-b)(x-c) + (x-a)(x-c) = 0$$

Подстановка $x = a$, $x = b$, $x = c$ в это выражение сразу приводит к полученным ранее произведениям.

3. Две прямые l_1 и l_2, угол между которыми равен α, служат общими внутренними касательными к окружностям радиусов R_1 и R_2. К окружностям проведена общая внешняя касательная, пересекающая прямые l_1 и l_2 в точках A и B соответственно. Найдите длину отрезка AB.
Решение.



Обозначения показаны на рисунке. Внешняя касательная – это прямая AB. Длину отрезка AB обозначим a. Пусть отрезки касательных, проведенных из точек A и B, соответственно равны x и y. Учитывая данные задачи, находим длины отрезков внутренних касательных, проведенных из точки их пересечения C. $CF = CP = R_1 \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$, $CE = CQ = R_2 \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$. Отрезки касательных AQ и AB, проведенных ко второй окружности из точки A, равны между собой. Также равны отрезки BP и BK. Это приводит к системе двух уравнений

$$\begin{cases} x + R_1 \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} + R_2 \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = a + y, \\ y + R_1 \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} + R_2 \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = a + x. \end{cases}$$

Из уравнений следует, что $x = y$, значит, $a = (R_1 + R_2) \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$.
Ответ. $(R_1 + R_2) \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$

4. Докажите равенство

$$2018\cdot 1+2017\cdot 2+2016\cdot 3\ldots+(2019-k)\cdot k+\ldots+1\cdot 2018=$$

$$=\frac{2019\cdot 2018}{2}+\frac{2018\cdot 2017}{2}+\frac{2017\cdot 2016}{2}+\ldots+\frac{n\cdot(n-1)}{2}+\ldots+\frac{2\cdot 1}{2}$$

Решение.

$2018\cdot 1+2017\cdot 2+2016\cdot 3\ldots+(2019-k)\cdot k+\ldots+1\cdot 2018=$

$=2018+2017+2017+2016+2016+2016+\ldots+$

$+\underbrace{(2019-k)+(2019-k)+\ldots+(2019-k)}_{k\text{ раз}}+\ldots+\underbrace{1+1+\ldots+1}_{2018\text{ раз}}=$

$=(2018+2017+2016+\ldots+1)+(2017+2016+\ldots+1)+(2016+\ldots+1)+\ldots+$

$((2019-k)+\ldots+1)+\ldots+1=$

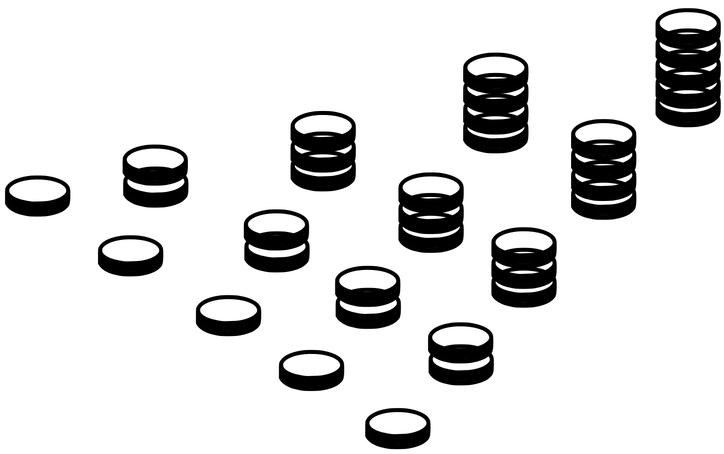
Каждая сумма в скобках является суммой арифметической прогрессии

$=\frac{2018+1}{2}\cdot 2018+\frac{2017+1}{2}\cdot 2017+\frac{2016+1}{2}\cdot 2016+\ldots$

$+\frac{(2019-k)+1}{2}\cdot(2019-k)+\ldots+\frac{2+1}{2}\cdot 2+1=$

$=\frac{2019\cdot 2018}{2}+\frac{2018\cdot 2017}{2}+\frac{2017\cdot 2016}{2}+\ldots+\frac{n\cdot(n-1)}{2}+\ldots+\frac{3\cdot 2}{2}+\frac{2\cdot 1}{2}$

Задача имеет наглядную иллюстрацию. Разложим в стопки монеты в таком порядке: в первый ряд положим 2018 монет, во второй ряд положим 2017 стопок по две монеты, в третий ряд положим 2016 стопок по три монеты, в k-й ряд положим $(2019-k)$ стопок по k монет, последней будет положена одна стопка из 2018 монет. На рисунке такая раскладка показана для пяти рядов. Сумма в левой части равенства – это количество всех монет, посчитанное по рядам в том порядке, как мы раскладывали монеты. Сумма в правой части доказываемого равенства – это сумма всех монет, посчитанная по параллельным рядам, идущим вдоль другой стороны получившегося треугольника.



5. Взяли десять подряд идущих натуральных чисел, больших 1, перемножили их, нашли все простые делители полученного числа и перемножили эти простые делители (взяв каждый ровно по одному разу). Какое наименьшее число могло получиться? Полностью обоснуйте свой ответ.

Решение. Докажем, что среди десяти подряд идущих чисел обязательно найдется число, которое имеет простой делитель, отличный от 2, 3, 5, 7. Посчитаем, сколько чисел из десяти идущих подряд может иметь указанные четыре

делителя. Из десяти чисел ровно пять делятся на 2, при этом не менее одного из этих пяти чисел делится на 3. (*Этот факт в работе можно не доказывать, тем не менее напомним одно из возможных доказательств. Остатки от деления на 6 шести подряд идущих чисел составляют набор от 0 до 5, т.е. найдется число, имеющее остатком 0, которое делится и на 2, и на 3.*) Далее, рассматриваемый набор из десяти чисел содержит не менее трех и не более четырех чисел, которые делятся на 3. Если таких чисел три, не менее одного этих трех делится на 2, и оно уже учтено ранее. Если таких чисел четыре, то они имеют вид $3k$, $3k+3$, $3k+6$, $3k+9$. В зависимости от четности k, или $3k$, $3k+6$, или $3k+3$, $3k+9$ делятся на 2. Таким образом, при рассмотрении чисел, делящихся на 3, мы можем добавить к пяти четным числам не более двух новых. Десять подряд идущих чисел содержат ровно два числа, которые делятся на 5, из них ровно одно четное и рассмотрено ранее. Поэтому делимость на 5 добавляет не более одного числа к семи уже учтенным ранее. Среди десяти подряд идущих чисел не более двух делятся на 7, одно из этих чисел – четное, и уже учтено. Делимость на 7 добавляет не более 1 числа к уже учтенным восьми. Такиим образом, среди десяти подряд идущих чисел не более девяти, имеющих хотя бы один из делителей 2, 3, 5, 7, т.е. найдется число, имеющее больший простой делитель, и не делящееся ни на один из первых четырех простых чисел. Значит, в произведении десяти чисел встретится хотя бы один делитель, отличный от 2, 3, 5, 7, поэтому произведение всех простых делителей будет больше 210. Наименьшее возможное произведение $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 = 2310$.
Ответ. 2310.

Муниципальный этап Всероссийской олимпиады по математике
2018-2019 уч.год

10 класс

Критерии проверки

	Балл	За что ставится
Задача 1	7	Полное решение, приведен верный алгоритм действий Жени, проверено выполнение всех условий.
	6	Полное решение, приведен верный алгоритм действий Жени, но не проверено, что расстановка, полученная по алгоритму, удовлетворяет всем условиям.
	4	Построен алгоритм действий Жени, оснванный на разбиении клеток на пары. Из-за неудачного выбора расположения клеток и (или) последовательности их заполнения решение не доведено до конца. Приведен верный ответ или ответ вообще не приводится.
	2	Приведена расстановка чисел, удовлетворяющая условию задачи, но последовательность ходов игроков не описана.
	1	Построен алгоритм действий Жени, оснванный на разбиении клеток на пары. Из-за неудачного выбора расположения клеток и (или) последовательности их заполнения, окончание решения содержит ошибку. Приведен неверный ответ (см. 4 балла).
	0	Неверное решение, или написан только ответ без рассуждений, или условие задачи понято неверно.

	Балл	За что ставится
Задача 2	7	Полностью верное решение.
	3	Доказано существование двух разных корней, не указано и (или) не обосновано их расположение, сформулированное в условии.
	0	Неверное доказательство. В частности, ошибка в выборе исходного утверждения и следствия из него, или ошибка в действиях с неравенствами.

	Балл	За что ставится
Задача 3	7	Полностью верное решение. Правильный ответ.
	5	Верное решение, содержащее арифметическую ошибку. Приведен ответ, отличающийся от верного вследствие арифметической ошибки.
	4	В целом верное решение, содержащее ошибку в применении тригонометрических функций. Приведен ответ, отличающийся от верного вследствие ошибочной замены тригонометрической функции на кофункцию и (или) неверного перехода к половинному аргументу.
	3	Доказано, что отрезки, обозначенные на рисунке x и y, равны.
	0	Неверное решение, в частности, вследствие неверно понятой конфигурации касательных.

Задача 4

Балл	За что ставится
7	Полностью верное решение.
5	Частично верное доказательство, содержащее арифметическую ошибку.
4	Частично верное доказательство, содержащее ошибку в подсчете числа слагаемых.
3	Частично верное доказательство, содержащее ошибку в применении формулы арифметической прогрессии.
1	Указано, что выражение справа является суммой сумм арифметических прогрессий. Дальнешее продвижение отсутствует.
0	Неверное решение.

Задача 5

Балл	За что ставится
7	Полностью верное решение.
6	Доказано, что среди десяти подряд идущих чисел обязательно найдется число, которое имеет простой делитель, отличный от 2, 3, 5, 7. Доказанное утверждение применено к поиску ответа. Может быть приведен неверный ответ, отличающийся от верного заменой делителя 11 на (один) другой делитель.
5	Доказано, что среди десяти подряд идущих чисел обязательно найдется число, которое имеет простой делитель, отличный от 2, 3, 5, 7. Указано, что это необходимо применить для поиска ответа. Применение доказанного утверждения не доведено до конца или ошибочно. Или доказано, что искомое число больше 210, но ответ не приведен.
3	Не доказано, что среди десяти подряд идущих чисел обязательно найдется число, которое имеет простой делитель, отличный от 2, 3, 5, 7, но указано, что этот факт необходимо применить при поиске ответа. Возможно, приведен верный ответ.
2	Рассматривается только делимость на 2, 3, 5, 7, вопрос наличия или отсутствия других простых делителей не принимается во внимание.
1	Приведен верный ответ без обоснования.
0	Неверное решение. Неверный ответ (см. 6 баллов).