

10 класс

1. Упростите выражение: $\frac{8}{1+a^8} + \frac{4}{1+a^4} + \frac{2}{1+a^2} + \frac{1}{1+a} + \frac{1}{1-a}$ и найдите его значение при $a = 2^{\frac{1}{16}}$.

Решение. Складываем последние два слагаемых, затем полученную сумму складываем с третьим от конца слагаемым и т.д. В результате получим $\frac{16}{1-a^{16}}$. Подставляя вместо a значение $2^{\frac{1}{16}}$, получаем 32.

Ответ: 32.

2. Найдите произведение всех корней уравнения $x^4 + 4x^3 - 2015x^2 - 4038x + 2018 = 0$.

Решение. Преобразуем уравнение к виду: $(x^2 + 2x)^2 - 2019(x^2 + 2x) + 2018 = 0$. Введем замену $t = x^2 + 2x$, получим уравнение: $t^2 - 2019t + 2018 = 0$, корни которого $t_1 = 1$, $t_2 = 2018$. Тогда $x^2 + 2x - 1 = 0$ или $x^2 + 2x - 2018 = 0$, откуда имеем $x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{2}$, $x_{3,4} = -1 \pm \sqrt{2019}$. Их произведение равно 2018.

Ответ: 2018.

3. Каждый из участников школьной благотворительной акции принес с собой либо одну энциклопедию, либо три художественные книги, либо два справочника. Всего собрали 150 энциклопедий. После окончания акции были заполнены две книжные полки в библиотеке, причем на каждой было поровну книг. На первой полке была пятая часть всех справочников, седьмая часть всех художественных книг и все энциклопедии. Сколько всего было участников акции и сколько книг они принесли?

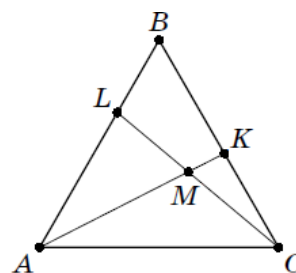
Решение. Пусть x – пятая часть справочников, y – седьмая часть всех художественных книг. Тогда на первой полке – $x+y+150$ книг, на второй – $4x+6y$ книг. Из условия задачи количество книг на полках равно, следовательно, $x+y+150=4x+6y$, откуда $3x+5y=150$. Но количество справочников кратно 2, а количество художественных книг кратно 3, т.е. $x=2k$, $y=3n$. Тогда уравнение принимает вид: $6k+15n=150$. Решаем в натуральных числах: $n=10-\frac{6}{15}k$, следовательно, $k=15$, $n=4$, откуда $x=30$, $y=12$.

Окончательно получаем, что всего 150 справочников принесли 75 участников, 84 художественные книги принесли 42 участника. Таким образом, в акции приняли участие 267 человек, которые принесли 384 книги.

Ответ: 267 человек, 384 книги.

4. На сторонах AB и BC равностороннего треугольника ABC отмечены точки L и K соответственно, M – точка пересечения отрезков AK и CL . Известно, что площадь треугольника AMC равна площади четырехугольника $LBKM$. Найдите угол AMC .

Решение. Из равенства площадей треугольника AMC и четырехугольника $LBKM$ следует равенство площадей



треугольников ACK и CBL (см. рисунок), т.к. в этом случае к равным площадям добавляется площадь одного и того же треугольника CMK . Имеем

$$S_{ACK} = \frac{1}{2} AC \cdot CK \cdot \sin \angle ACK, \text{ а } S_{CBL} = \frac{1}{2} BC \cdot BL \cdot \sin \angle CBL, \text{ учитывая равенство сторон и}$$

углов в правильном треугольнике, получаем, что $CK=LB$, т.е. $\triangle ACK = \triangle CBL$ по двум сторонам и углу между ними. Следовательно, $\angle CKA = \angle BLC$. Учитывая, что $\angle BLC + \angle BCL = 180^\circ - \angle LBC = 120^\circ$, получим

$$\angle AMC = \angle MCK + \angle MKC = \angle LCB + \angle BLC = 120^\circ.$$

Ответ: 120° .

5. В каждую клетку квадратной таблицы 25×25 вписано произвольным образом одно из чисел 1 или -1 . Под каждым столбцом пишется произведение всех чисел, стоящих в этом столбце. Справа от каждой строки пишется произведение всех чисел, стоящих в этой строке. Докажите, что сумма 50 написанных произведений не может оказаться равной нулю.

Решение. Найдем произведение всех 25 чисел, записанных под каждым столбцом и всех 25 чисел, записанных справа от строчек. Так как в этом произведении каждое из чисел квадратной таблицы входит по два раза, то произведение этих 50 произведений, в каждом из которых стоит по 25 множителей, будет положительным, т. е. равно 1. А так как произведение 50 чисел положительно, то отрицательных сомножителей будет четное число (2, 4, ..., 50). Сумма же 50 произведений может быть нулем лишь в случае, когда 25 слагаемых равно 1, а 25 слагаемых равно -1 , т. е. слагаемых с -1 должно быть нечетное число. А это значит, что сумма 50 написанных произведений не может равняться нулю.