11 класс

1. Решить уравнение $\sqrt{sin^2x + lg^2x - 1} = sinx + lgx - 1.$

Ответ: 10, $\pi/2+2n\pi$, n – целое неотрицательное число.

Указания. Возведя в квадрат и разложив на множители, получим sin x=1или lg x=1. Из первого уравнения имеем $x=\pi/2+2n\pi$, n – целое число. Из второго x=10. Поскольку логарифм определён только для положительных чисел, n – неотрицательно. Проверкой легко убедится, что все числа, указанные в ответе, подходят.

Критерии. Получены лишние отрицательные корни: 3 балла.

2. Имеются три попарно скрещивающихся прямых, не параллельных одной плоскости. Доказать, что их можно пересечь плоскостью так, чтобы её точки пересечения с прямыми были вершинами прямоугольного треугольника.

Указание. Выберем две скрещивающиеся прямые и рассмотрим две параллельные плоскости, их содержащие. Пусть AB - их общий перпендикуляр. Он перпендикулярен этим плоскостям. Третья скрещивающаяся прямая пересекает эти плоскости, так как нет плоскости, параллельной этим прямым. Обозначим одну из точек пересечения через C. Плоскость (ABC) удовлетворяет условиям задачи.

3. Пусть R (n) обозначает сумму остатков, когда n делится на 1, 2, …, n соответственно. Докажите, что R (п) $<n^2/4$ для каждого целого $n \geq 7$.

Указание. Разобьём доказательство на два случая, когда n – чётно и n – нечётно.

Случай 1. Пусть n=2k, $k\geq4$. Рассматривая последовательно деление на 2,3,…, k–1, k, k+1,…,2k–1 и заменяя в R(2k) остатки от деления числа 2k на 2,.., k–1 максимально возможными остатками для каждого из этих чисел, получим неравенство: $R(n)=R(2k)\leq (1+\ldots+(k-2))+((k-1)+\ldots+2+1)=(k-1)^2<n^2/4$.

Случай 2. Пусть n=2k+1, $k\geq2$. Рассматривая последовательно деление на 2,3,…, k–1, k, k+1, … ,2k и заменяя в R(2k+1) остатки от деления числа 2k+1 на 2,.., k максимально возможными остатками для каждого из этих чисел, получим неравенство: $R(n)=R(2k+1)\leq (1+\ldots+(k-1))+(k+(k-1)+\ldots+2+1)=k^2<n^2/4$.

Критерии. Рассуждение разбито на два случая (четный и нечётный) и верно сделаны оценки остатков, но выкладки не доведены до конца: 2 балла.

4. В доме творчества 21 кружок. Их посещают 100 школьников, причём каждый ходит только в один кружок. Среди них 15 девочек, каждая знакома с 29 другими школьниками, и 85 мальчиков, каждый из которых знаком с 89 школьниками. Доказать, что найдётся кружок, в котором все между собой знакомы.

Указание. Если предположить, что в каждом кружке есть пара незнакомых школьников, то хотя бы в 21-15=6 кружках будет пара незнакомых мальчиков. Каждая девочка незнакома, по крайней мере, с 70–14=56 мальчиками. Значит, пар незнакомых мальчика с девочкой не менее $15\cdot56=840$. С другой стороны, 12 мальчиков незнакомы не более чем с 9 девочками, а остальные 73 – не более чем с 10 девочками. Значит, пар незнакомых девочки с мальчиком не более 108+730=838. Противоречие.

Критерии. Замечено, что есть шесть пар незнакомых мальчиков: 1 балл.

5. Найти все функции f, определённые на множестве действительных чисел, такие что $f(xy)+f(xz)\geq1+f(x)f(yz)$ для всех действительных x, y, z.

Ответ: f(x)=1 (постоянная функция, все значения которой равны 1).

Указания. Положим x=y=z=1 и получим f(1)+f(1)≥1+f(1)f(1), или $(f(1)–1)^2≤0$ и значит, f(1)=1..

Положим x=y=z=0 и получим f(0)+f(0)≥1+f(0)f(0), или $(f(0)–1)^2≤0$ и значит, f(0)=1.

Положим z=y=1 и получим f(x)+f(x)≥1+f(x)f(1), откуда f(x)≥1.

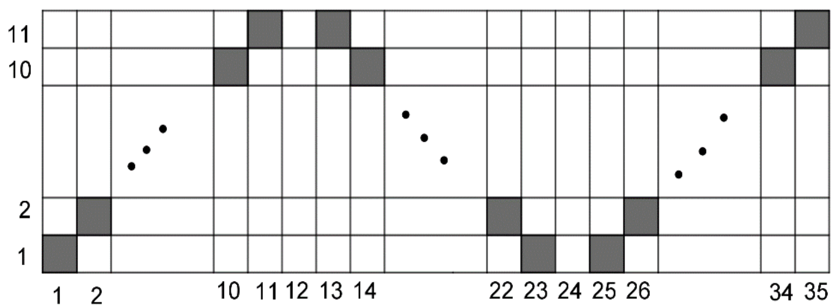
Положим z=y=0 и получим f(0)+f(0)≥1+f(x)f(0), откуда f(x)≤1. Следовательно, f(x)=1.

Проверка показывает, что данная функция подходит.

Критерии. Найдено значение функции в нуле и единице: 2 балла.

6. Некоторые клетки доски 11×35 отмечены. Назовем клетки соседними, если они имеют общую сторону. Оказалось, что у каждой клетки есть, по крайней мере, один отмеченный сосед. Доказать, что есть клетка, у которой, по крайней мере, два отмеченных соседа.

Указание.



Закрасим 33 клетки так, как показано на рисунке. Каждая отмеченная клетка, соседняя с одной из закрашенных, будет соседствовать еще с одной закрашенной. И если предположить, что у каждой клетки ровно один отмеченный сосед, то 33 закрашенные клетки должны разбиться на пары с общей отмеченной. Но закрашенных клеток 33, и разбиение на пары невозможно. Противоречие.