ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ
МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП
2018-2019 УЧЕБНЫЙ ГОД

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

11 КЛАСС

Общее количество баллов **35. Решение каждой задачи оценивается Жюри из7 баллов** в соответствии с критериями и методикой оценки, разработанной центральной предметно-методической комиссией:

Баллы	**Правильность (ошибочность) решения.**
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение, но имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение в целом верное. Однако решение содержит ошибки, либо пропущены случаи, не влияющие на логику рассуждений.
3-4	Верно рассмотрен один из существенных случаев.
2	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0-1	Рассмотрены отдельные случаи при отсутствии правильного решения.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Указания к оцениванию отдельных задач содержатся в комментариях к решениям.

1. Найдите минимальное значение выражения $\frac{25x^2\sin^2 x+16}{x\sin x}$ при $0<x<\pi$.

Ответ. 40.

Решение. Обозначим $y=x\sin x$. Тогда выражение запишется как

$$\frac{25y^2+16}{y}=25y+\frac{16}{y}.$$

Заметим, что $y>0$ (так как $x>0$ и $\sin x>0$), поэтому можно применить неравенство между средними:

$$25y+\frac{16}{y}\geq 2\sqrt{25y\cdot\frac{16}{y}}=40.$$

Равенство имеет место, когда $25y=\frac{16}{y}$, то есть$y=\frac{4}{5}$, что является допустимым значением.

Комментарий. *Приведено любое полное обоснованное решение – 7 баллов. Приведено верное в целом рассуждение, содержащее незначительные пробелы или неточности – 6 баллов. Получен верный ответ, но не доказана его минимальность – 2 балла. Введена новая переменная без дальнейшего продвижения – 1 балл. Рассмотрены только частные случаи или конкретные примеры – 1 балл. Задача не решена или решена неверно – 0 баллов.*

2. В прямоугольном треугольнике длины катета a и гипотенузы c выражаются двузначными целыми числами, причём в обоих числах используется одинаковый набор цифр. Длина катета b представляет собой положительное рациональное число. Чему может быть равно значение длины гипотенузы? (Приведите все ответы и докажите, что других нет.)

Ответ. 65.

Решение. Поскольку $a\neq c,$ в двузначных числах должны использоваться две разные цифры, и стоять они будут на разных местах. Пусть $a=10e+d,$ $c=10d+e.$ Тогда $b=\sqrt{(10d+e)^2-(10e+d)^2}=3\sqrt{11(d-e)(d+e)}.$

По условию, b рационально, значит, не может содержать квадратных корней. Число 11 – простое, значит, один из множителей кратен 11. Множитель $d-e<11$ (так как d и e цифры), следовательно, $d+e$ делится на 11. Но максимальное значение суммы двух разных цифр равно $9+8=17$, следовательно, $d+e=11$. При этом $d-e$ должно являться полным квадратом. Проверяя возможные варианты $9+2,\ 8+3,\ 7+4,\ 6+5$, видим, что это условие выполняется только для $d=6,\ e=5.$ Треугольник имеет стороны $33,\ 56,\ 65$.

Комментарий. *Приведено полное обоснованное решение – 7 баллов. Приведено верное в целом рассуждение, содержащее незначительные пробелы или неточности – 6 баллов. Получена запись двузначных чисел – 1 балл. Получено выражение* b *через радикал – еще 2 балла. Верный ответ найден подбором, и не доказано, что других решений нет – 1 балл. Задача не решена или решена неверно – 0 баллов.*

3. Найдите наименьшее натуральное число N, которое делится наp, оканчивается наpи имеет сумму цифр, равную p, если известно, что p – простое число и $2p+1$ является кубом натурального числа.

Ответ. 11713.

Решение. Пусть $2p+1=n^3$. Тогда $(n-1)(n^2+n+1)=2p$. Число $2p$ может иметь только следующие положительные делители: $1,2,p,2p$. Число n, очевидно, нечётно, поэтому $n-1$ делится на 2. Число n^2+n+1 больше 1, поэтому $n-1=2, n^2+n+1=p$. Отсюда $n=3, p=13$.

Искомое число N представим в виде $N=X\cdot 100+13$, где число X – число N без двух последних цифр. Поскольку N делится на 13, то X тоже делится на 13. Сумма цифр числа X равна $13-(1+3)=9$, то есть X делится на 9, а т.к. 9 и 13 числа взаимно простые, то X делится и на $9\cdot 13\ =\ 117$.

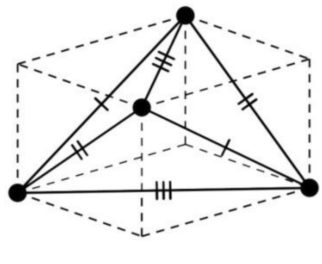
Наименьшим из таких чисел является само число $X=117$, тогда $N=117\cdot 100+13=\ 11713$.

Комментарий. *Верное обоснованное решение – 7 баллов. Значение pнайдено подбором, и не показано, что оно единственное – 1 балл; значениеpнайдено и доказана его единственность – 3 балла. Если значение N найдено подбором, но не показано, что оно наименьшее, за это добавляется 1 балл. Если решение не доведено до конца, за доказательство полезных вспомогательных утверждений – 1-2 балла.*

4. Бумажный треугольник со сторонами $34,\ 30,\ 8\sqrt{13}$ согнули по средним линиям и сложили в треугольную пирамиду. Через противоположные рёбра пирамиды провели параллельные плоскости (всего 6 плоскостей). Докажите, что параллелепипед, образованный пересечением этих плоскостей – прямоугольный, и найдите его объем.

Ответ. 1224.

Решение. Все четыре грани пирамиды равны, поэтому у пирамиды скрещивающиеся рёбра попарно равны. На противоположных гранях параллелепипеда разные диагонали равны, так как это скрещивающиеся рёбра пирамиды (см. рисунок). Таким образом, в параллелограмме, являющемся гранью параллелепипеда, равны диагонали, а, следовательно, это прямоугольник, и параллелепипед является прямоугольным.



Обозначим его рёбра a,b,c. Рёбра пирамиды равны длинам средних линий треугольника: $17,\ 15,\ 4\sqrt{13}.$ Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} a^2+b^2=289,\\ a^2+c^2=225,\\ b^2+c^2=208. \end{cases}$$

Решая систему, находим $a^2=153=17\cdot 3^2, b^2=136=17\cdot 2^3, c^2=72=2^3\cdot 3^2$.

Объем параллелепипеда равен $V=abc=\sqrt{a^2b^2c^2}=17\cdot 2^3\cdot 3^2=1224$.

Комментарий. *Верное обоснованное решение – 7 баллов. Доказано, что параллелепипед является прямоугольным – 4 балла, найдены длины ребер – 3 балла.В верном решении имеются не вполне очевидные и не обоснованные переходы – 5 баллов. Если решение не доведено до конца, за доказательство полезных вспомогательных утверждений – 1-2 балла.*

5. Двадцать человек, среди них $A,\ B,\ C$, случайным образом садятся за круглый стол. Какова вероятность того, что, по крайней мере, двое из $A,\ B,\ C$ сидят рядом друг с другом?

Ответ. $\frac{17}{57}$.

Решение. Перенумеруем места за столом по часовой стрелке от 1 до 20. Будем считать исходом любой (неупорядоченный) набор из трёх номеров мест, на которых сидят A, B, C, а благоприятным исходом – неупорядоченный набор из трёх номеров мест, на которых сидят A, B, C, если номера не являются соседними числами (у числа 20 соседние – 19 и 1).

Число всех исходов равно $\frac{20\cdot19\cdot18}{6}$, поскольку первое место можно выбрать 20 способами, второе – 19, третье – 18, но мы условились считать неупорядоченные наборы, поэтому делим на число перестановок трех элементов $3! = 6$.

Для благоприятных ситуаций есть две возможности.

1) Все трое сидят рядом, то есть занимают места $(1,2,3), (2,3,4), \dots, (20,1,2)$. Очевидно, таких троек 20.

2) Ровно двое сидят рядом, то есть занимают места $(1,2), (2,3), \dots, (20,1)$, всего 20 пар мест. Если A и B, например, заняли места $(6,7)$, то третий не может занимать места $5,6,7,8$, но может занять любое из оставшихся мест, которых осталось 16. По принципу умножения число благоприятных исходов в этом случае равно $20 \cdot 16$, а общее число благоприятных исходов равно $20 + 20 \cdot 16 = 20 \cdot 17$.

По классическому определению вероятности $p = \frac{20\cdot17\cdot6}{20\cdot19\cdot18} = \frac{17}{57}$.

Комментарий. *Верное обоснованное решение – 7 баллов. Вероятность можно найти разными способами; в данном решении баллы распределяются следующим образом: определено, что считать исходом, и что – благоприятным исходом – 1 балл, верно найдено число всех исходов – 2 балла, верно найдено число благоприятных исходов – 4 балла. За вычислительную ошибку при верных рассуждениях снижать на балл. Если решение не доведено до конца, за доказательство полезных вспомогательных утверждений 1-2 балла.*