Муниципальный этап Всероссийской олимпиады по математике 2018-2019 уч.год

11 класс

Решения и ответы

1. Сумма семи различных натуральных чисел равна $2n$. Верно ли, что обязательно найдутся три числа среди этих семи чисел, сумма которых больше n?
Решение. Достаточно привести контрпример. Один из возможных: $n = 50$, семь чисел $11, 12, 13, 14, 15, 16, 19$. Сумма всех семи чисел равна 100. Сумма $15 + 16 + 19 = 50$. Так как эти три числа - наибольшие среди семи, то любая сумма трех чисел не превосходит 50.
Дополнение. Для построения контрпримера берется арифметическая прогрессия семи чисел с разностью 1, такая, что ее сумма является максимально возможной из меньших $2n$. Последнее число этой прогрессии заменяется на число, дополняющее сумму до $2n$. Этот алгоритм работает для таких натуральных n, k (k-первый член прогрессии), которые могут быть связаны уравнением $n = 4k + 6$. В приведенном контрпримере $n = 50, k = 11$.
Ответ. Не обязательно. Существует контрпример.

2. Найдите все положительные решения уравнения

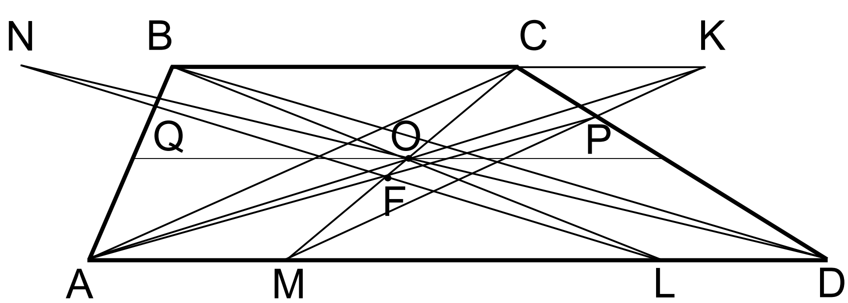
$$x^{101} + 100^{99} = x^{99} + 100^{101}$$

Не забудьте обосновать свой ответ.
Решение. Уравнение приводится к виду

$$x^{99}(x^2 - 1) = 100^{99}(100^2 - 1)$$

Очевидно, решением является $x = 100$. При $0 < x \leq 1$ левая часть отрицательна, а правая часть положительна, решений нет. При $x > 1$ левая часть – возрастающая функция, поэтому необходимое значение принимает не более одного раза. Значит, других корней нет. *Ответ.* 100.

3. Дана трапеция $ABCD$ с большим основанием AD. Точка O – середина средней линии трапеции. Точки K, L, M, N – образы вершин A, B, C, D при центральной симметрии относительно точки O. Прямые KM и NL пересекают стороны CD и AB в точках P и Q соответственно. Докажите, что каждый из отрезков CM, BL, AP, DQ делит площадь трапеции пополам.
Решение.



Все обозначения показаны на рисунке. Пусть длина нижнего основания AD равна a, верхнего основания BC равна b. Так как точка O по условию расположена на равном расстоянии от параллельных прямых, содержащих основания трапеции, то при симметрии относительно этой точки прямые AD и BC переходят друг в друга.

Так как точка O – середина средней линии, и средняя линия трапеции содержит в себе среднюю линию треугольника CMD (параллельную основанию MD), то $MD = \frac{a+b}{2}$, т.е. этот отрезок равен средней трапеции. Отсюда сразу получаем, что площадь треугольника CMD равна половине площади трапеции. Рассуждения относительно треугольника ABL проводятся аналогично.

Так как точка A при симметрии переходит в K, M переходит в C, то отрезок AM переходит в отрезок CK, значит, $ACKM$ – параллелограмм, и прямые AC и KM параллельны. Поэтому $ACPM$ – трапеция. Пусть диагонали этой трапеции AP и CM пересекаются в точке F. Как известно, в любой трапеции площади двух треугольников, образованных диагоналями и боковыми сторонами, равны. В нашем случае равны площади треугольников AMF и CPF. Отсюда получаем, что площади тругольников APD и CMD равны между собой. Уже доказано, что площадь треугольника CMD равна половине площади трапеции, поэтому площадь треугольника APD также равна половине площади трапеции, что требовалось. Рассуждения про треугольник AQD проводятся аналогично.

4. Многочлен с целыми коэффициентами принимает значение 2018 ровно в 2018 целых точках. Докажите, что многочлен не может иметь целые корни.

   Решение. Пусть $P(x)$ – данный многочлен, тогда $P(x) - 2018$ имеет 2018 целых различных корней. В этом случае справедливо представление

$$P(x) - 2018 = (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_3) \cdot \ldots \cdot (x - x_{2018}) \cdot Q(x)$$

   где $Q(x)$ – многочлен с целыми коэффициентами. Это означает, что $P(x)$ можно представить как

$$P(x) = (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_3) \cdot \ldots \cdot (x - x_{2018}) \cdot Q(x) + 2018$$

   При подстановке любого целого числа x_0, отличного от $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{2018}$, каждый множитель в произведении $(x_0 - x_1) \cdot (x_0 - x_2) \cdot (x_0 - x_3) \cdot \ldots \cdot (x_0 - x_{2018}) \cdot Q(x_0)$ окажется целым, не равным 0. При этом все множители $(x_0 - x_k)$ различны. Поэтому найдутся три множителя, по модулю не меньшие $2, 3, 1009$, а остальные множители не меньше 1. Значит, произведение $(x_0 - x_1) \cdot (x_0 - x_2) \cdot (x_0 - x_3) \cdot \ldots \cdot (x_0 - x_{2018}) \cdot Q(x_0)$ по модулю превосходит 2018 и $P(x)$ целых корней не имеет.

5. Докажите, что для любого натурального числа a, все простые делители которого не меньше 7, найдется такое натуральное число m, что произведение am будет числом, десятичная запись которого состоит только из единиц.

   Решение. Пусть a – число, все простые делители которого отличны от 2, 3, 5. Число $\frac{1}{a}$ Раскладывается в периодическую десятичную дробь с периодом n. Это означает, что

$$\frac{1}{a} = 0, b_0 b_1 b_2 \ldots b_n b_1 b_2 \ldots b_n \ldots$$

   Здесь b_0 - непериодическое начало десятичной записи. Умножим левую и правую часть этого равенства на 10^k, подобрав k так, чтобы после запятой сразу шел период десятичной дроби. (b_0 - целая часть получившегося числа.)

$$\frac{10^k}{a} = b_0, b_1 b_2 \dots b_n b_1 b_2 \dots b_n \dots$$

Перепишем так

$$\frac{10^k - b_0 \cdot a}{a} = 0, b_1 b_2 \dots b_n b_1 b_2 \dots b_n \dots$$

Повторим действия, которые применяются при переводе периодической десятичной дроби в обыкновенную. Умножим левую и правую части равенства на 10^n.

$$\frac{10^k - b_0 \cdot a}{a} \cdot 10^n = \overline{b_1 b_2 \dots b_n}, b_1 b_2 \dots b_n b_1 b_2 \dots b_n \dots$$

(Здесь $\overline{b_1 b_2 \dots b_n}$ – традиционная форма записи натурального числа, образованного цифрами $b_1, b_2, \dots b_n$.)

$$\frac{10^k - b_0 \cdot a}{a} \cdot 10^n = \overline{b_1 b_2 \dots b_n} + 0, b_1 b_2 \dots b_n b_1 b_2 \dots b_n \dots$$

Заменим $0, b_1 b_2 \dots b_n b_1 b_2 \dots b_n \dots$ на $\dfrac{10^k - b_0 \cdot a}{a}$.

$$\frac{10^k - b_0 \cdot a}{a} \cdot 10^n = \overline{b_1 b_2 \dots b_n} + \frac{10^k - b_0 \cdot a}{a}$$

$$\frac{10^k - b_0 \cdot a}{a} \cdot (10^n - 1) = \overline{b_1 b_2 \dots b_n}$$

$$(10^k - b_0 \cdot a) \underbrace{999 \dots 9}_{n \text{ девяток}} = \overline{b_1 b_2 \dots b_n} \cdot a$$

$$(10^k - b_0 \cdot a) \cdot 9 \cdot \underbrace{111 \dots 1}_{n \text{ единиц}} = \overline{b_1 b_2 \dots b_n} \cdot a$$

$$(9 \cdot 10^k - 9 \cdot b_0 \cdot a) \cdot \underbrace{111 \dots 1}_{n \text{ единиц}} = \overline{b_1 b_2 \dots b_n} \cdot a$$

Справа стоит целое число, которое делится на a. Множитель $(9 \cdot 10^k - 9 \cdot b_0 \cdot a)$ взаимно прост с a. Действительно, если бы этот множитель имел хотя бы один общий простой делитель с a, то $9 \cdot 10^k$ делилось бы на этот простой делитель. Но $9 \cdot 10^k$ имеет простые делители только 2, 3, 5, а a не имеет этих делителей. Значит, второй множитель $\underbrace{111 \dots 1}$ делится на a, т.е. существует такое m, что произведение am будет числом, десятичная запись которого состоит только из единиц.

Муниципальный этап Всероссийской олимпиады по математике
2018-2019 уч.год

11 класс

Критерии проверки

Задача 1

Балл	За что ставится
7	Полное решение, приведен один контрпример для одного любого n.
5	Полное решение, приведен один контрпример для одного любого n, при проверке сумм допущена арифметиечская ошибка.
0	Неверное решение, или неверный ответ, или неправильно понято условие задачи.

Задача 2

Балл	За что ставится
7	Полностью верное решение.
6	Верное решение, имеется указание на монотонность функции при $x \geq 1$, не проверен случай $0 < x < 1$.
5	Верное решение, имеется указание на монотонность функции, допущена арифметическая ошибка.
1	Написан только верный ответ.
0	Приведен верный ответ, но решение обосновано неверно, или приведен неверный ответ.

Задача 3

Балл	За что ставится
7	Полностью верное решение. Возможно, доказательство проведено только для одной пары отрезков AP и CM или DQ и BL.
5	Верное решение, содержащее в рассуждениях одно сформулированное, но не доказанное вспомогательное утверждение, например, что длина отрезка MD равна средней линии трапеции.
4	Доказано, что отрезки AP и DQ делят площадь трапеции пополам. Доказательство, что этим же свойством обладают отрезки CM и BL, отсутствует или неверно. Или доказаны два отдельных факта: 1) $ACKM$ – параллелограмм, или другим способом обоснована параллельность прямых AC и KM, 2) отрезки CM и BL делят площадь трапеции пополам.
3	Доказано, что отрезки CM и BL делят площадь трапеции пополам. Доказательство, что этим же свойством обладают отрезки AP и QD, отсутствует или неверно.
2	Доказано, что $ACKM$ – параллелограмм, или другим способом обоснована параллельность прямых AC и KM. Дальнейшее продвижение отсутствует.
0	Неверное решение, в частности, вследствие неверно понятого условия.

Задача 4

Балл	За что ставится
7	Полностью верное решение.
5	Сформулировано, но не доказано, что полученное произведение целых чисел по модулю превосходит 2018.
2	Написано разложение на множители многочлена $P(x) - 2018$, дальнейшее продвижение отсутствует или неверно.
0	Приведен верный ответ, но решение обосновано неверно, или приведен неверный ответ.

	Балл	За что ставится
Задача 5	7	Полностью верное решение.
	6	В целом верное решение, в котором использован частный случай разложения в бесконечную периодическую десятичную дробь. Возможность существования нескольких непериодических цифр не рассматривается, т.е. сразу после запятой начинается период.
	3	Использовано разложение в бесконечную десятичную дробь, задача сведена к исследованию уравнения в целых числах, дальнейшее продвижение отсутствует или неверно.
	0	Приведено неверное доказательство или условие задачи понято неверно.