11 класс

11.1. Известно, что

$$\sin x \cos y = \cos x \sin y = \frac{1}{2}.$$

Найдите $\cos 2x - \sin 2y$.

Ответ. -1 или 1.

Первое решение. Перемножив данные равенства и умножив произведение на 4, получаем $\sin 2x \sin 2y = 1$. Отсюда $\sin 2x = \sin 2y = 1$ или $\sin 2x = \sin 2y = -1$ (оба случая возможны; достаточно взять $x = y = \frac{\pi}{4}$ или $x = y = \frac{3\pi}{4}$). В обоих случаях $\cos 2x = 0$. Тогда $\cos 2x - \sin 2y = -1$ или $\cos 2x - \sin 2y = 1$.

Второе решение. Из условия имеем

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x = 1$$

и, аналогично, $\sin(x - y) = 0$. Тогда $x + y = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ и $x - y = \pi\ell$ при целых k и ℓ. Но тогда $2x = (x + y) + (x - y) = \frac{\pi}{2} + \pi(2k + \ell)$, откуда $\cos 2x = 0$, а $2y = (x + y) - (x - y) = \frac{\pi}{2} + \pi(2k - \ell)$, откуда $\sin 2y = \pm 1$. Значит, $\cos 2x - \sin 2y = \mp 1$. Те же примеры показывают, что оба ответа возможны.

Комментарий. Потерян один из ответов — снять 2 балла.

Без обоснования приведены примеры углов, дающих оба ответа — 2 балла.

Без обоснования приведён пример углов, дающих один ответ — 0 баллов.

11.2. Числа x и y удовлетворяют неравенству $x > y > \frac{2}{x-y}$. Докажите, что $x^2 > y^2 + 4$.

Решение. Сложив неравенства $x > \frac{2}{x-y}$ и $y > \frac{2}{x-y}$, получаем, что $x + y > \frac{4}{x-y}$.

Из условия $x > y$ следует, что знаменатель дробей положителен, поэтому на него можно умножить без изменения знака неравенства. Тогда получаем: $(x+y)(x-y) > 4$, то есть $x^2 - y^2 > 4$. Утверждение доказано.

Замечание. Число 4 нельзя заменить на большее, поскольку при $0 < \varepsilon < 1$, $x = 2/\varepsilon + 2\varepsilon$ и $y = 2/\varepsilon + \varepsilon$ имеем

$$x > y = \frac{2}{\varepsilon} + \varepsilon > \frac{2}{\varepsilon} = \frac{2}{x - y},$$

но при этом

$$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y) = \varepsilon\left(\frac{4}{\varepsilon} + 3\varepsilon\right) = 4 + 3\varepsilon^2,$$

что может быть сколь угодно близким к 4 при достаточно малых ε.

Комментарий. При домножении на $x - y$ не отмечено, что $x - y > 0$ — снять 1 балл.

11.3. Около основания n-угольной пирамиды можно описать окружность. Известно, что центр этой окружности равноудалён от всех середин боковых рёбер пирамиды. Докажите, что длины всех боковых рёбер пирамиды равны.

Решение. Пусть O — центр окружности, описанной около основания $A_1A_2\ldots A_n$ пирамиды $SA_1A_2\ldots A_n$, точки $M_1, M_2, \ldots, M_n$ — соответственно середины боковых рёбер $SA_1, SA_2, \ldots, SA_n$ пирамиды $SA_1A_2\ldots A_n$ (см. рис. 8). Как известно, все точки $M_1, M_2, \ldots, M_n$ лежат в одной плоскости (эта плоскость параллельна основанию и равноудалена от основания и вершины пирамиды). Обозначим её через α.

Пусть Q — точка пересечения луча SO с плоскостью α. Тогда QM_k, $k = 1, \ldots, n$ — средние линии треугольников SOA_k, и потому при всех $k = 1, \ldots, n$ имеем: $QM_k = \frac{R}{2}$, где R — радиус окружности, описанной около основания пирамиды. Значит, Q — точка, равноудалённая от вершин многоугольника $M_1M_2\ldots M_n$, то есть является центром окружности, описанной около многоугольника $M_1M_2\ldots M_n$. Пусть OH — перпендикуляр, проведённый из точки O к плоскости α. Тогда из равенства прямоугольных треугольников OHM_k, $k = 1, \ldots, n$ (они равны, поскольку катет OH у них общий, а гипотенузы OM_k равны по условию), следует, что и точка H — центр описанной окружности многоугольника $M_1M_2\ldots M_n$. Значит, точки Q и H совпадают. Это означает, что SO — высота пирамиды. Но тогда из равенства прямоугольных треугольников SOA_k, $k = 1, \ldots, n$, следует равенство боковых сторон пирамиды.

Замечание. Ошибочным является такое рассуждение: треугольники OM_1A_1 и OM_nA_n рав-

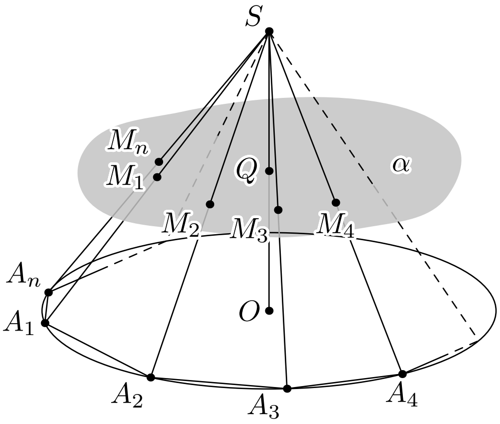

Рис. 8

ны по двум сторонам ($OM_1 = OM_n$ и $OA_1 = OA_n$) и равным высотам (высоты, проведённые из точек M_1 и M_n, равны, поскольку они равны половине длины высоты пирамиды). Здесь ошибка заключается в том, что высоты этих треугольников вовсе не обязательно равны расстояниям от M_1 и M_n до основания.

Комментарий. В решении без доказательства используется то, что SO есть высота пирамиды — не более 2 баллов за задачу.

11.4. Верно ли, что любое делящееся на 6 число, большее 1000, можно представить в виде

$$n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4) - m(m+1)(m+2),$$

где m и n — натуральные числа?

Ответ. Неверно.

Решение. Заметим, что произведение пяти последовательных натуральных чисел $n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$ делится на 5. Разберём несколько случаев.

Если m имеет остаток 0, 3 или 4 при делении на 5, то $m(m+1)(m+2)$ делится на 5.

Если m имеет остаток 1 при делении на 5, то $m(m+1)(m+2)$ имеет остаток 1 при делении на 5.

Если m имеет остаток 2 при делении на 5, то $m(m+1)(m+2)$ имеет остаток 4 при делении на 5.

Значит, число $n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4) - m(m+1)(m+2)$ может иметь при делении на 5 только остатки 0, 1, 4. То есть, например, число 1002 в требуемом виде представить не удастся.

Комментарий. Верный ответ без объяснения — 0 баллов.

Доказано, что разность произведений не может иметь остаток 2 (или 3) при делении на 5, но не приведён пример конкретного числа, которое не представимо в нужном виде — баллы не снимаются.

11.5. Можно ли выбрать число $n \geqslant 3$ и так заполнить таблицу $n \times (n+3)$ (n строк и $n+3$ столбца) различными натуральными числами от 1 до $n(n+3)$, чтобы в каждой строке нашлись три числа, одно из которых равно произведению двух других?

Ответ. Нельзя.

Решение. Предположим, что таблицу удалось заполнить требуемым образом. Рассмотрим в каждой строке три числа: два множителя и их произведение. Отметим в каждой строке наименьший множитель. Заметим, что множитель не может равняться 1, так как в этом случае в строке оказались бы одинаковые числа. Так как строк n, то всего наименьших множителей n. А так как они различны, то среди них найдётся такой, который не меньше $n+1$. Но тогда в строке, где находится этот множитель, второй множитель будет не меньше $n+2$. Поэтому их произведение не меньше

$$(n+1)(n+2) = n^2 + 3n + 2 > n^2 + 3n = n(n+3).$$

Противоречие.

Комментарий. Верный ответ без объяснения — 0 баллов.

Замечено, что множитель не может равняться 1 — 2 балла.

Доказано только, что в одной из строк произведение не меньше $n(n+1)$ — 2 балла.