6 класс

1. Палиндром – это натуральное число, которое одинаково читается как слева направо, так и справа налево. Существует ли пятизначный палиндром, равный сумме двух четырёхзначных палиндромов?

Ответ: существует, например, 6006+5005=11011.

Возможны другие примеры: 7777+4444=12221.

Критерии. Ответ без примера: 0 баллов.

2. Каких трёхзначных чисел больше: тех, у которых все цифры одной чётности, или тех, у которых соседние цифры разной чётности?

Ответ: поровну.

Указания. *Способ 1.* Интересующие нас числа будем рассматривать десятками. В каждом десятке одни и те же цифры сотен и единиц (они одной чётности). Цифр десятков ровно 10: по пять каждой чётности, и значит, из этого десятка в каждый вид добавится по пять чисел. Значит, чисел каждого вида одинаково.

Способ 2. Подсчитаем, сколько есть трёхзначных чисел одной чётности. Чётных: цифру сотен можно выбрать 4 способами (число не может начинаться с нуля), а цифру десятков и цифру единиц - 5 способами. В итоге 4·5·5=100 способов. Нечётных: цифру сотен можно выбрать 5 способами, как и цифру десятков и цифру единиц. В итоге 5·5·5=125 способов. Значит, чисел с цифрами одной чётности 100+125=225.

Подсчитаем, сколько есть трёхзначных чисел, у которых соседние - разной чётности. ЧНЧ: цифру сотен можно выбрать 4 способами (число не может начинаться с нуля), а цифру десятков и цифру единиц - 5 способами. В итоге 4·5·5=100 способов. НЧН: цифру сотен можно выбрать 5 способами, как и цифру десятков и цифру единиц. В итоге 5·5·5=125 способов. Значит, чисел с соседними цифрами разной чётности 100+125=225.

И тех, и других по 225 и, значит, их поровну.

Критерии. Ответ без обоснования: 0 баллов.

3. На прямой отметили семь точек A, B, C, D, E, F, G в данном порядке. Оказалось, что AG=23см, BF=17см и CE= 9см. Найти сумму длин всех отрезков с концами в этих точках.

Ответ: 224см.

Указания. Имеется пять пар отрезков, дающих в сумме AG и сам AG. Имеется три пары отрезков, дающих в сумме BF и сам BF. Имеется одна пара отрезков, дающих в сумме CE и сам CE. Значит, сумма длин всех отрезков равна 6·23+4·17+2·9=138+68+18=224 (см).

Критерии. Правильный ответ без обоснования: 2 балла.

За вычислительную ошибку при правильном обосновании снимается 3 балла.

4. Можно ли шарики семи цветов разложить в пять коробок, стоящих по кругу, так, чтобы в каждой коробке было три шарика разных цветов, и в соседних коробках не встречались два шарика одного цвета?

Ответ: нельзя.

Указания. Так как шариков $15=3\cdot5$, а цветов семь, то найдётся не менее трёх шариков одного цвета. Если шариков каждого цвета не более двух, то всего шариков не более $2\cdot7=14<15$. Шарики одного цвета не могут лежать в одной коробке. Но тогда из них есть два шарика, лежащие в соседних коробках. А это противоречит условию. Значит, так разложить шарики семи цветов нельзя.

Критерии. Ответ без обоснования: 0 баллов.

5. Имеется семь гирь весом 1г, 2г, …, 7г. Их все выложили на весы так, что наступило равновесие. Вася утверждает, что он может всегда снять три гири, одна из которых весом в 1г так, что равновесие сохранится. Прав ли Вася?

Ответ: не прав.

Указание. Если равновесие наступило, когда на одну чашку положены гири: 1, 6, 7, а на другую остальные, то так снять три гири не получится. Если после снятия трёх гирь наступило равновесие, то оно наступит и, если оставить эти три гири, а остальные снять. Если с чашки с единицей снята только одна гиря, то, очевидно, равновесия нет, поскольку гирю в 1г не уравновесить двумя другими. Если взяты гиря в 1г и гиря в 6г или 7г, то на другой чашке должна быть гиря весом 7г или 8г соответственно, но её там нет.

Критерии. Правильно указан случай равновесия, когда нельзя снять три гири с гирей в 1г, но без обоснования: 5 баллов.

6. Из бумажного квадрата 8×8 выстригли n семи клеточных уголков. Оказалось, что больше таких уголков выстричь нельзя. При каком наименьшем n такое возможно? Семи клеточный уголок получается, если из квадрата 4×4 выстричь квадрат 3×3 (по клеткам).

Ответ: $n=3$.

Указания. Пример. На рисунках показаны два примера расположения трёх уголков, так что нельзя выстричь ещё один.

			1				
			1				
			1				2
			1	1	1	1	2
			3	3	3	3	2
			3	2	2	2	2
			3				
			3				

			1	1	1	1	
			1				2
			1				2
			1				2
3	3	3	3	2	2	2	2
			3				
			3				
			3				

Клетки, принадлежащие одному уголку, помечены одинаковыми цифрами. Возможны и другие примеры.

Оценка. Осталось показать, что если выстригли два уголка, то можно выстричь ещё один. Если есть строка и столбец, в котором нет клеток уголков, то взяв клетку на их пересечении за «вершину» уголка и направив стороны уголка в сторону более удаленных сторон, получим уголок, который можно выстричь. Если таких строки и столбца нет, то пусть перекрыты столбцы (иначе повернём доску на 90°). В этом случае есть два прямоугольника 1×4, закрывающие столбцы. Разрезав доску по горизонтальной оси симметрии, получим в каждой части свой уголок. В одной из частей (в любой) найдётся прямоугольник, примыкающий к короткому краю, в котором нет клеток уголка, и удалённый от перекрывающего прямоугольника не менее чем на четыре клетки. Одна из его крайних клеток служит вершиной уголка, который можно выстричь.

Критерии. Пример без оценки: 3 балла.