7 класс

1. Можно ли на плоскости провести четыре прямые и отметить на них семь точек так, чтобы на каждой прямой было ровно три отмеченных точки?

Ответ: можно.

Указания. Пример 1. Среди четырёх прямых есть две параллельных. Две другие пересекают их в различных точках и пересекаются между собой. Отмечаем пять точек пересечения прямых и ещё по одной на параллельных прямых. Отмечено семь точек, и на каждой прямой - по три отмеченных точки.

Пример 2. Три прямые проходят через одну точку, а четвёртая пересекает каждую из них. Отмечены 4 точки пересечения и ещё по одной точке на трёх прямых, проходящих через одну точку. Отмечено семь точек, и на каждой прямой - по три отмеченных точки.

Пример 3. Если каждые две прямые пересекаются (6 точек пересечения). Отмечаются пять точек пересечения и по одной точке на прямых, проходящих через неотмеченную точку пересечения.

Критерии. Любое натуральное количество правильных примеров: 7 баллов.

2. Палиндром – это натуральное число, которое одинаково читается как слева направо, так и справа налево. Найти все четырёхзначные палиндромы, равные сумме двух трёхзначных палиндромов.

Ответ: 1111 и 1221.

Указания. Поскольку 1111=505+606 и 1221=555+666, то указанные числа в ответе подходят. Сумма двух трёхзначных - трёхзначное или четырёхзначное, начинающееся на 1. Так как оно палиндром, то оно оканчивается на 1. Цифры сотен и десятков должны быть в четырёхзначном одинаковы, и значит, сумма цифр десятков из трёхзначных палиндромов равна 0 или 11. Сумма двух цифр не может быть 22 и более. Других решений нет.

Критерии. Только одно число: 1 балл.

Два числа без обоснования, что других нет: 3 балла.

3. На прямой AB отметили точку O и из неё провели в указанном порядке лучи OC, OD, OE, OF в одну полуплоскость прямой AB (луч OC лежит между лучами OA и OD). Найти сумму всех углов с вершиной O, сторонами которых служат лучи OA, OC, OD, OE, OF, OB, если $\angle COF=97°$, $\angle DOE=35°$.

Ответ: 1226°.

Указания. Имеется четыре пары смежных углов и развёрнутый, дающие в сумме 180° или равные 180°. Имеется две пары углов, сумма которых равна $\angle COF$, и он сам. И ещё $\angle DOE$. Значит, сумма величин всех нужных углов равна $5\cdot180°+3\cdot97°+1\cdot35°=900°+291°+35°= 1226°$.

Критерии. Правильный ответ без обоснования: 2 балла.

За вычислительную ошибку при правильном обосновании снимается 3 балла.

4. Имеется двадцать семь гирь весом 1г, 2г, …, 27г. Их все выложили на весы так, что наступило равновесие. Вася утверждает, что он может всегда снять три гири, одна из которых весом в 1г так, что равновесие сохранится. Прав ли Вася?

Ответ: не прав.

Указание. Равновесие наступит, когда на одну чашку положены гири: 1, 20, 21, …, 27, а на другую остальные, тогда так снять три гири не получится. Если после снятия трёх гирь наступило равновесие, то оно наступит и, если оставить эти три гири, а остальные снять. Если с чашки с единицей снята только одна гиря, то, очевидно, равновесия нет, поскольку гирю в 1г не уравновесить двумя другими. Если взяты гиря в 1г и гиря x, то на другой чашке должна быть гиря весом x+1, но её там нет. Значит, снять три гири требуемым образом нельзя.

Критерии. Правильное равновесие в примере без пояснений: 4 балла.

5. В комнате по кругу стоят 15 стульев. Три ювелира, когда никто не видит, садятся на три соседних стула, и сидящий на среднем стуле прячет алмаз в стул, на котором он сидит. У инспектора есть несколько детекторов, которые показывают, сидели на стуле или нет. Какое наименьшее число детекторов он должен разместить на стульях до посещения ювелиров, чтобы по их показаниям определить, где находится алмаз?

Ответ: 9 детекторов.

Указания. Оценка. Рассмотрим пять стульев таких, что между любыми двумя ближайшими из них есть ещё два других стула. Если в двух ближайших из них нет детектора, то присоединив к двум стульям между ними любой их них получим две возможных посадки ювелиров, в которых показания детекторов одинаковы. Чтобы в любых двух ближайших был детектор нужно, чтобы в них было размещено не менее трёх детекторов. Таких различных пятёрок можно образовать три. Значит нужно не менее $3{\cdot}3=9$ детекторов. Пример. Их нужно расположить тройками по три соседних стульях в промежутках, между которыми по два стула без детекторов. По количеству сработавших детекторов легко определить какие три стула были заняты.

Критерии. Пример без оценки: 3 балла.

6. Доказать, что число, у которого старшая цифра - наибольшая, и каждая следующая цифра меньше предыдущей, не кратно 11.

Указания. Пусть есть числа такого вида, кратные 11. Рассмотрим наименьшее из них. Если оно оканчивается на нуль, делим его на 10 и получим число, кратное 11 и меньшее, что невозможно так как мы выбрали наименьшее. Если оно не оканчивается на нуль, то вычтем из него 11 и получим меньшее кратное 11 и удовлетворяющее свойству убывания цифр. Но это тоже невозможно. Значит, таких чисел нет.

Можно не рассматривать наименьшее число, а указанный процесс начать с любого и довести до однозначного числа не равного нулю, которое не кратно 11.

Возможно решение, основанное на признаке делимости на 11: у числа, кратного 11, знакопеременная сумма цифр делится на 11. Должно быть показано, что знакопеременная сумма больше нуля, но меньше старшей цифры.

Критерии. Рассмотрение частных случаев: 0 баллов.