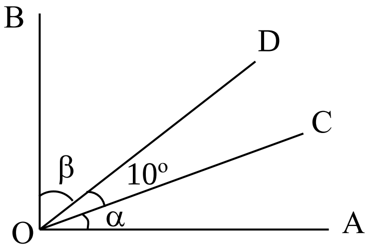
7-й класс

7.1 Лучи OA и OB образуют прямой угол. Семиклассник Петя провел внутри этого угла лучи OC и OD, образующие угол 10^{o}, а затем посчитал все острые углы между любыми парами нарисованных лучей (не только соседних). Оказалось, что сумма самого большого и самого маленького из найденных углов составляет 85^{o}. Найдите величины трех углов, на которые прямой угол разбивается лучами OC и OD.

Решение: См. рис.

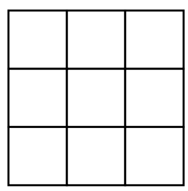


Если бы наименьшим углом оказался α или β, например α, то наибольшим углом оказался бы угол $\beta+10^{o}$, а их сумма составила бы 90^{o}, что противоречило бы условию задачи. Значит, наименьший угол – это угол 10^{o}, а наибольший – это какой-то из этих углов $\alpha+10^{o}$ или $\beta+10^{o}$, например, $\beta+10^{o}$. Тогда $(\beta+10^{o})+10^{o}=85^{o}$, $\beta=65^{o}$. Следовательно,

$$\alpha=90^{o}-(\beta+10^{o})=90^{o}-75^{o}=15^{o}.$$

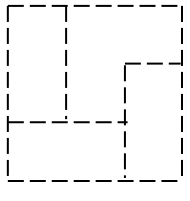
Итак, ответ: $65^{o}, 15^{o}, 10^{o}$.

7.2 Из 24 спичек выложена фигура в виде квадрата 3×3 (см. рисунок), длина стороны каждого маленького квадратика равна длине спички. Какое наименьшее число спичек можно убрать так, чтобы не осталось ни одного целого квадратика 1×1, выложенного из спичек.



Ответ: 5 спичек.

Решение: Оценка: четырьмя спичками обойтись не удастся, так как убирая спичку, мы «портим» не более двух квадратиков (каждая спичка является стороной одного или двух соседних квадратиков), но изначально у нас 9 маленьких квадратиков. Пример для 5 спичек:



7.3 Ваня нарисовал окружность и отметил на ней 25 точек. Потом Витя провел какие-то 6 отрезков с концами в этих точках. Докажите, что после этого Ваня сможет провести еще один такой отрезок, не имеющий общих точек ни с одним из проведенных Витей.

Решение: 12 точек – концы проведенных отрезков– разбивают окружность на 12 дуг. На этих дугах как-то распределены остальные 13 точек. Найдется дуга, на которой находятся (по меньшей мере) две точки. Ясно, что если соединить отрезком эти точки, то получится отрезок, не пересекающийся с ранее проведенными.

7.4 m и n – натуральные числа. Докажите, что если НОD(m,n)+ НОК(m,n) = $m+n$, то одно из чисел m и n делится на другое.

Решение: Пусть НОD(m,n)=d. Тогда $m=da$, $n=db$ с натуральными взаимно простыми a и b . При этом НОК(m,n)=dab. Поэтому равенство из условия задачи переписывается в виде

$$d+dab=da+db.$$

Сокращая на d, получаем

$1+ab=a+b, \quad ab-a-b+1=0, \quad a(b-1)-(b-1)=0, \ (a-1)(b-1)=0.$

Значит, хотя бы одно из чисел a и b равно 1. Например, $a=1$. Тогда $m=d$ и $n=db$, и выходит, что n делится на m.

7.5 Даны 10 натуральных чисел, не превышающих 91. Докажите, что отношение некоторых двух из этих чисел принадлежит отрезку $[1;1{,}5]$.

Решение: Упорядочим эти числа по возрастанию: $a_1 \le a_2 \le a_3 \le \ldots \le a_{10}$. Докажем, что для некоторого номера k выполнено неравенство $\dfrac{a_{k+1}}{a_k} \le \dfrac{3}{2}$. Предположим противное: пусть $a_{k+1} > \dfrac{3}{2}a_k$ при $k=1,2,3,\ldots,9$. Находим тогда $a_1 \ge 1$, $a_2 > \dfrac{3}{2}a_1 \ge \dfrac{3}{2}$, но т.к. a_2 – целое, то $a_2 \ge 2$. Далее аналогично:

$a_3 > \dfrac{3}{2}a_2 \ge \dfrac{3}{2}\cdot 2 = 3,$ откуда $a_3 \ge 4$,

$a_4 > \dfrac{3}{2}a_3 \ge \dfrac{3}{2}\cdot 4 = 6,$ откуда $a_4 \ge 7$,

$a_5 > \dfrac{3}{2}a_4 \ge \dfrac{3}{2}\cdot 7 = \dfrac{21}{2} = 10\dfrac{1}{2},$ откуда $a_5 \ge 11,$

$a_6 > \dfrac{3}{2}a_5 \ge \dfrac{3}{2}\cdot 11 = \dfrac{33}{2} = 16\dfrac{1}{2},$ откуда $a_6 \ge 17,$

$a_7 > \dfrac{3}{2}a_6 \ge \dfrac{3}{2}\cdot 17 = \dfrac{51}{2} = 25\dfrac{1}{2},$ откуда $a_7 \ge 26,$

$a_8 > \dfrac{3}{2}a_7 \ge \dfrac{3}{2}\cdot 26 = 39,$ откуда $a_8 \ge 40,$

$a_9 > \dfrac{3}{2}a_8 \ge \dfrac{3}{2}\cdot 40 = 60,$ откуда $a_9 \ge 61,$

$a_{10} > \dfrac{3}{2}a_9 \ge \dfrac{3}{2}\cdot 61 = \dfrac{183}{2} = 91\dfrac{1}{2},$ откуда $a_{10} \ge 92.$

Это противоречит тому, что (по условию) $a_{10} \ge 91.$