7класс

1. Решите задачу: осьминоги с четным числом ног всегда лгут, а осьминоги с нечетным числом всегда говорят правду. Встретились пять осьминогов, у каждого из которых было от 7 до 9 ног.
Первый сказал: «Вместе у нас 36 ног»;
Второй: «Вместе у нас 37 ног»;
Третий: «Вместе у нас 38 ног»;
Четвёртый: «Вместе у нас 39 ног»;
Пятый: «Вместе у нас 40 ног».
Сколько ног было у них на самом деле?

Решение. Все ответы различны, значит, правдивый один или все лгут. Если бы все лгали, то у них было бы 8 ног, т.е. всего 40, что совпадает с последним ответом — противоречие.
Значит, четыре лгут, один говорит правду и у него нечетное число ног т.к. $4\cdot 8=32$, то у правдивого осьминога может быть только 7 ног, иначе правдивого ответа не будет. Таким образом, четвертый осьминог с семью ногами правдив, остальные лжецы с 8-ми ногами.

Ответ: 39 ног.

2. Два автомобиля выехали из одной точки круговой трассы длиной 150 км в противоположные стороны. Через некоторое время они встретились и продолжили движение в тех же направлениях. Через два часа после начала движения автомобили встретились второй раз. Найдите скорость второго автомобиля, если скорость первого – 60 км/ч.

Решение. Пусть скорость первого автомобиля x км/ч, тогда их скорость сближения будет равна (x+60) км/ч. Очевидно, что за два часа они проехали два круга, т.е. 300км, следовательно, $2\cdot\left(x+60\right)=300$, откуда получаем, что x=90(км/ч).

Ответ: 90 км/ч.

3. Докажите, что не существуют целые числа x и y, при которых выполняется равенство: $(x+7)(x+6)=8y+3$.

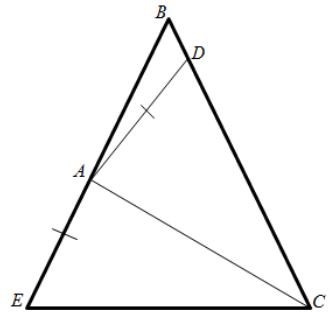
Решение. Пусть x и y целые числа. Заметим, что $x+6$ и $x+7$ — последовательные целые числа, значит, одно из них будет четным, т. е. будет делиться нацело на 2. Тогда и произведение $(x+7)(x+6)$ будет делиться нацело на 2. Далее видим, что $8y$ – четное число для любого целого значения y, а значит, $8y+3$ – нечетное число (как сумма четного и нечетного). Таким образом, при целых значениях переменных x и y левая часть уравнения четное число, а правая нечетное, следовательно, данное уравнение не имеет решения в целых числах.

4. В треугольнике ABC $\angle A=3\angle C$. Точка D на стороне BC обладает свойством, что $\angle DAC=2\angle C$. Докажите, что $AB+AD=BC$.

Решение. Пусть $\angle C=x$, тогда $\angle BAC=3x$. Продолжим отрезок BA за точку A и отложим на нем отрезок $AE=AD$ (см. рисунок). Очевидно, что

$$\angle EAC=180°-\angle BAC=180°-3x.$$

Заметим, что $\Delta EAC=\Delta ADC$ по первому признаку (AC – общая, $AD=AE$ (по построению) и $\angle EAC=\angle ADC$).



В ΔAEC: $\angle AEC=2x$, $\angle ACE=x$, т.е. $\angle BCE=2x$, поэтому ΔBEC – равнобедренный. Таким образом, $AB+AD=AB+AE=BE=BC$.

5. На железнодорожной платформе с утра собралось много народа в ожидании электрички. На первой электричке уехала десятая часть всех ожидавших, на второй – седьмая часть оставшихся, а на третьей – пятая часть оставшихся. Сколько пассажиров было на платформе первоначально, если после отхода третьей электрички там осталось 216 пассажиров?

Решение. Решая с конца, получим, что перед отходом третьей электрички на платформе было $216:6\cdot 5=270$ пассажиров, перед отходом второй – $270:6\cdot 7=315$ пассажиров, перед отходом первой – $315:9\cdot 10=350$ пассажиров.

Ответ: 350 пассажиров.