8 класс.

1. Можно ли число 26 представить в виде суммы натуральных слагаемых, сумма обратных к которым равна 1?

Ответ: Можно.

Указания. Пример: 26= 6+6+6+4+4. 3·1/6+2·1/4=1/2+1/2=1.

Критерии. Если нет правильного примера, то 0 баллов.
При наличии правильного примера и вычисления суммы обратных - 7 баллов.
За отсутствие вычисления суммы обратных снимается один балл.
2. Числа от 1 до 8 расставили по кругу. Число назовём большим, если оно больше своих соседей, и маленьким, если оно меньше своих соседей. Каждое число в расстановке - большое или маленькое. Какова наибольшая возможная сумма маленьких чисел?

Ответ: 13.

Указания. Соседние числа не могут быть одного вида и, значит, большие и маленькие числа чередуются, и их по четыре. 8 – большое. 7 - тоже большое, так как маленькое должно быть меньше двух чисел, а семь меньше только одного. 1 и 2 – маленькие. 6 и 5 не могут быть одновременно маленькими, так как меньше только двух чисел, а соседними они в этом случае быть не могут. Значит, сумма двух других маленьких (кроме 1 и 2) не больше 10. И сумма маленьких не больше 13. Пример: 8, 6, 7, 1, 3, 2, 5, 4.

Критерии. Только правильный ответ и пример: 2 балла.

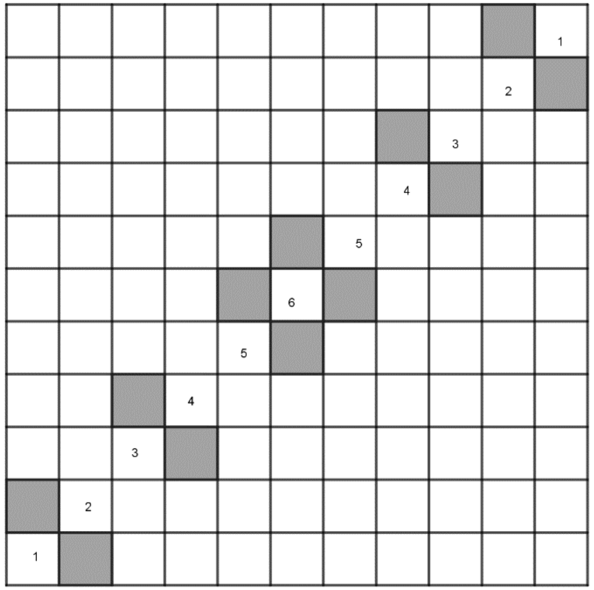
3. Найти все пары чисел (a, b), для которых выполняется равенство $(a+b-1)^2=a^2+b^2-1$.

Ответ: подходят все пары чисел (1, t), (t, 1), где t – любое число.

Перенеся все слагаемые в одну часть и используя формулы разности квадратов и вынесение за скобку общего множителя, получим $2(a-1)(b-1) = 0$. Если произведение равно нулю, то один из множителей равен нулю. Отсюда ответ.

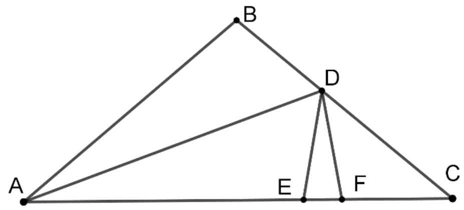
Критерии. Получено, что только одна из переменных равна 1 из-за деления на выражение, возможно равное нулю: 2 балла.

4. Некоторые клетки доски 11×11 закрашены. Оказалось, что у каждой клетки есть по крайней мере два закрашенных по стороне соседа. Доказать, что есть клетка, у которой по крайней мере три закрашенных соседа.



Указание. Предположим, что таких клеток нет. То есть у каждой клетки ровно два закрашенных соседа. У угловых клеток, помеченных цифрой 1 (см. рис.) только два соседа, и они закрашены. У клеток, помеченных цифрой 2, уже есть два закрашенных соседа, и значит, два других не закрашены. У клеток, помеченных цифрой 3, есть два не закрашенных соседа и, значит, два других закрашены. У клеток, помеченных цифрой 4, уже есть два закрашенных соседа и, значит, два других не закрашены. У клеток, помеченных цифрой 5, есть два не закрашенных соседа, и, значит, два других закрашены. У клетки, помеченной цифрой 6, четыре закрашенных соседа. Противоречие.

5. В равнобедренном тупоугольном треугольнике ABC с основанием AC проведена биссектриса AD. На основании AC отмечена точка F так, что DF=FC. Доказать, что BD=FC.



Указания. На стороне AC отметим точку E, так, что AB=AE. Треугольники ABD и AED равны по двум сторонам и углу между ними. Из равенства треугольников BD=DE. DF=FC по условию. Для доказательства требуемого достаточно доказать, что DE=DF. Для этого достаточно показать, треугольник DEF – равнобедренный. Это делается счётом углов. Пусть $\angle BAD=\alpha$. Тогда $\angle CAD=\alpha$ и $\angle BAC=2\alpha=\angle BCA=\angle FDC$. $\angle ADB=\angle ADE=3\alpha$. Углы DEF и DFE – внешние для треугольников ADE и DFC и равны сумме внутренних не смежных с ними и, значит, оба равны 4α. Отсюда следует, что треугольник DEF – равнобедренный.

Критерии. Рассмотрена точка E, но дальнейших продвижений нет: 1 балл.

6. Существуют ли такие натуральные числа a и b, что $a < b$ и b^2+4a – квадрат натурального числа?

Ответ: таких натуральных чисел нет.

Пусть такие числа есть. Заметим, что $b^2<b^2+4a<b^2+4b+4=(b+2)^2$. Между квадратами b^2 и $(b+2)^2$ есть только один квадрат $(b+1)^2$, значит, $b^2+4a=(b+1)^2$, откуда $4a=2b+1$, но равенство чётного и нечётного невозможно. Противоречие.

Критерии. Рассмотрено несколько частных случаев: 0 баллов.