ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ
МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП
2018-2019 УЧЕБНЫЙ ГОД

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

8 КЛАСС

Общее количество баллов **35. Решение каждой задачи оценивается Жюри из7 баллов** в соответствии с критериями и методикой оценки, разработанной центральной предметно-методической комиссией:

Баллы	Правильность (ошибочность) решения.
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение, но имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение в целом верное. Однако решение содержит ошибки, либо пропущены случаи, не влияющие на логику рассуждений.
3-4	Верно рассмотрен один из существенных случаев.
2	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0-1	Рассмотрены отдельные случаи при отсутствии правильного решения.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Указания к оцениванию отдельных задач содержатся в комментариях к решениям.

1. По кругу сидело 10 болтунов. Сначала один из них рассказал один анекдот, следующий по часовой стрелке – два анекдота, следующий – три, и так далее по кругу, пока один не рассказал 100 анекдотов за раз. Тут болтуны устали, и следующий по часовой стрелке рассказал 99 анекдотов, следующий – 98, и так далее по кругу, пока один не рассказал всего один анекдот, и все разошлись. Сколько всего анекдотов рассказал каждый из этих 10 болтунов?

Ответ. 1000 анекдотов.

Решение. Пронумеруем болтунов от 1 до 10 по часовой стрелке, начиная с того, кто рассказал первый анекдот. Тогда для любой пары болтунов с номерами k и $k+1$ $(1 \leq k \leq 9)$ сначала $(k+1)$ −ый болтун на каждом круге рассказывает на один анекдот больше, чем k −ый – и так 10 кругов. А после того как болтуны устали, $(k+1)$ −ый болтун рассказывает на один анекдот меньше, чем k −ый – тоже 10 кругов. Значит, первый и второй рассказали поровну анекдотов, второй и третий – поровну и т.д. Итак, все рассказали поровну анекдотов – каждый десятую часть от общего количества. Всего анекдотов было рассказано $1+2+\cdots++99+100+99+\cdots+2+1=(1+99)+(2+98)+\cdots+(99+1)+100=100\cdot100=10000$. Каждый из 10 болтунов рассказал $\frac{10000}{10}=1000$ анекдотов.

Комментарий. *Доказано, что каждый болтун рассказал десятую часть от общего количества анекдотов – 4 балла. Найдено общее количество рассказанных анекдотов – 3 балла. При отсутствии решения за потенциально полезные идеи и подходы – 2-3 балла.*

2. Делитель натурального числа называется собственным, если он не равен самому числу и 1. Найдите все такие натуральные числа, у которых самый большой собственный делитель отличается на 3 (в ту или другую сторону) от куба самого маленького собственного делителя.

Ответ. 10 и 22.

Решение. Пусть x – наименьший собственный делитель числа N. Тогда его наибольший собственный делитель равен x^3+3 или x^3-3. Как числа x и x^3+3, так и числа xи x^3-3 – разной чётности, поэтому одно из них чётно. Оба числа – делители N, значит, N – чётно. Поэтому наименьший собственный делитель N равен 2. Так как $x=2$, то наибольший собственный делитель равен $2^3-3=5$

или $2^3 + 3 = 11$. Ясно, что наибольший собственный делитель равен $\frac{N}{x}$. Поэтому $N = 2 \cdot 5 = 10$ или $N = 2 \cdot 11 = 22$.

Комментарий. *За каждый из двух верных ответов с проверкой, что он подходит – по 1 баллу. Соображение, что наибольший и наименьший делитель разной чётности – 2 балла. Пропущен один из ответов – снимать 3 балла. При отсутствии решения за потенциально полезные идеи и подходы – 2-3 балла.*

3. В треугольнике ABC провели биссектрису BD, а в треугольниках ABD и CBD – биссектрисы DE и DF соответственно. Оказалось, что $EF \parallel AC$. Найдите угол DEF.

Ответ. 45°.

Решение. Пусть отрезки BD и EF пересекаются в точке G. Из условия имеем $\angle EDG = \angle EDA = \angle DEG$, откуда $GE = GD$. Аналогично, $GF = GD$. Значит, $GE = GF$, то есть BG – биссектриса и медиана, а значит, и высота в треугольнике BEF. Отсюда DG – медиана и высота, а значит, и биссектриса в треугольнике EDF, откуда $\angle DEG = \angle EDG = \angle FDG = \angle GFD$. Поскольку сумма четырёх входящих в последнее равенство углов равна 180° градусам, каждый из них равен 45° градусам.

Комментарий. *Приведено полное обоснованное решение – 7 баллов. Приведено верное в целом рассуждение, содержащее незначительные пробелы или неточности – до 5 баллов.*

4. Докажите, что выражение $x^5 - 4x^4y - 5y^2x^3 + 20y^3x^2 + 4y^4x - 16y^5$ не равно 77 ни при каких целых значениях x и y.

Решение. Разложим на множители данное выражение:

$$x^5 - 4x^4y - 5y^2x^3 + 20y^3x^2 + 4y^4x - 16y^5 = x^4(x - 4y) - 5x^2y^2(x - 4y) + 4y^4(x - 4y)$$
$$= (x - 4y)(x^4 - 5x^2y^2 + 4y^4) = (x - 4y)(x + 2y)(x - 2y)(x - y)(x + y).$$

Необходимо проверить, что множители попарно различны. Они могут совпадать при $y = 0$. Но x^5 ни при каких целых значениях переменной не равно 77. При этом число 77 может быть разложено в произведение максимум четырёх различных сомножителей, например, $1 \cdot (-1) \cdot 7 \cdot (-11)$.

Комментарий. *Правильное разложение выражения на множители – 4 балла. Проверка, что множители попарно различны – 1 балл. Замечено, что число 77 может быть разложено в произведение максимум четырёх различных сомножителей – 2 балла. Баллы суммируются.*

5. В футбольном турнире, где каждая команда по одному разу сыграла с каждой, участвовали команды А, Б, В, Г, Д и Е. За победу команда получала 3 очка, за ничью 1 очко, за поражение 0 очков. В итоге оказалось, что команды А, Б, В, Г и Д набрали по 7 очков. Какое наибольшее количество очков могла набрать команда Е?

Ответ. 7 очков.

Решение. В матче, где одна из команд победила, команды вместе набирают 3 очка, в матче, закончившемся вничью –2 очка. Поскольку 7 не делится на 3, команда, набравшая 7 очков, сделала хотя бы одну ничью. Так как таких команд пять, ничьих в турнире было сделано, по крайней мере, три. Всего матчей, как легко проверить, было сыграно 15. Поэтому все команды вместе набрали не больше, чем $2 \cdot 3 + 3 \cdot 12 = 42$ очка. Из них 35 очков набрали команды А, Б, В, Г и Д. Поэтому команда Е набрала не больше $42 - 35 = 7$ очков. Как она могла набрать ровно 7 очков, показано в таблице справа.

	А	Б	В	Г	Д	Е
А	×	3	3	1	0	0
Б	0	×	3	3	1	0
В	0	0	×	3	3	1
Г	1	0	0	×	3	3
Д	3	1	0	0	×	3
Е	3	3	1	0	0	×

Комментарий. *Предложена реализация – 3 балла, сделана оценка – 4 балла, баллы суммируются. При отсутствии решения за потенциально полезные идеи и подходы – 2-3 балла. Ответ без обоснования – 0 баллов.*