8 класс

8.1. Четырём девочкам дали конфеты. Маша сказала: «У нас с Катей на 12 конфет больше, чем у Лены с Олей», а Катя сказала: «У нас с Леной на 7 конфет меньше, чем у Маши с Олей». Докажите, что одна из девочек ошиблась.

Первое решение. Предположим, что ни одна из девочек не ошиблась. Тогда общее количество конфет у Маши с Катей такой же чётности, как общее количество конфет у Лены с Олей (они различаются на чётное число 12). Значит, общее количество конфет у всех четырёх девочек чётно. Аналогично рассуждая, получаем, что общее количество конфет у Кати с Леной противоположной чётности общему количеству конфет у Маши с Олей (они различаются на нечётное число 7). Значит, общее количество конфет у всех четырёх девочек нечётно. Противоречие.

Второе решение. Обозначим через c_M, c_K, c_L и c_O количества конфет у Маши, Кати, Лены и Оли, соответственно. Тогда из условия известно, что, если бы ни одна из девочек не ошиблась, то

$$\begin{cases} c_M + c_K = c_L + c_O + 12, \\ c_K + c_L = c_M + c_O - 7. \end{cases}$$

Сложив оба равенства, получим $2c_K - 2c_O - 5 = 0$. Заметив, что $2c_K$ и $2c_O$ чётны, а 5 нечётно, получаем противоречие.

Комментарий. В предположении противного доказано только, что общее количество конфет чётно — 3 балла.

В предположении противного доказано только, что общее количество конфет нечётно — 3 балла.

8.2. На переменах школьники играли в настольный теннис. Любые два школьника играли друг с другом не более одной игры. В конце недели оказалось, что Петя сыграл половину, Коля — треть, а Вася — пятую часть от числа всех проведённых за неделю игр. Какое количество игр могло быть сыграно за неделю, если известно, что Вася не играл ни с Петей, ни с Колей?

Ответ. 30.

Решение. Из условия следует, что половина, треть и пятая часть от общего количества проведённых игр — целые числа. Поскольку наименьшее общее кратное знаменателей — чисел 2, 3, 5 — равно 30, то общее количество проведённых игр тоже кратно 30. Пусть оно равно $30p$. Тогда Петя сыграл $15p$, Коля — $10p$, Вася — $6p$ игр.

Пусть y — количество игр, сыгранных между собой Петей и Колей (это число равно 0 или 1), а z — количество игр, сыгранных без участия Пети, Коли и Васи. Тогда $15p+10p+6p-y+z = 30p$, то есть $p = y - z$. Единственное возможное положительное значение p равно 1, и оно достигается, когда $y = 1$, $z = 0$.

Замечание. Условие непротиворечиво: такая ситуация действительно могла иметь место (то есть можно провести 30 игр в соответствии с условием).

Комментарий. Доказано, что общее количество игр делится на 30 — 2 балла.

Приведён пример с 30 играми, но не обосновано, что других вариантов нет — 3 балла.

Приводить пример с 30 играми в решении не требуется (по условию известно, что такие игры были проведены).

8.3. На сторонах AB, BC и CA треугольника ABC выбраны соответственно точки D, E и F так, что $BE = BD$ и $AF = AD$. Известно, что ED — биссектриса угла BEF. Докажите, что FD — биссектриса угла AFE.

Решение. Из равенства сторон BE и BD треугольника DBE следует, что $\angle BDE = \angle BED$ (см. рис. 2). Но, по условию, $\angle FED = \angle BED$. Значит, $\angle FED = \angle BDE$. Это означает, что прямые BA и EF параллельны. Но тогда $\angle EFD = \angle ADF$. Кроме того, из равенства $AF = AD$ следует, что $\angle ADF = \angle AFD$. Значит, FD — биссектриса угла AFE. Утверждение доказано.

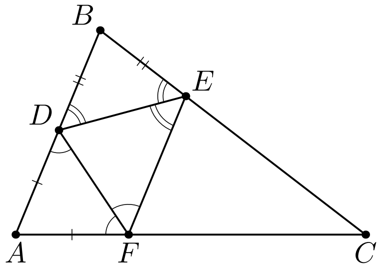

Рис. 2

Комментарий. Доказано, что прямые BA и EF параллельны — 3 балла.

8.4. Сумма двух целых чисел равна 100, и сумма двух других целых чисел тоже равна 100. Числа в первой паре перемножили и сложили с произведением чисел во второй паре. Могла ли сумма этих двух произведений равняться 1001?

Ответ. Не могла.

Решение. Предположим, что сумма произведений могла равняться 1001. Сумма двух чисел (в данном случае — этих произведений) бывает нечётной только когда одно из них чётно, а другое — нечётно. Значит, одно из произведений чётно, а другое — нечётно.

Если сумма двух чисел равна 100, а их произведение нечётно, то оба числа должны быть нечётными, при этом одно из них должно давать остаток 1 при делении на 4, а другое — остаток 3 при делении на 4. Тогда остаток от деления их произведения на 4 равен $1 \cdot 3 = 3$.

Если сумма двух чисел равна 100, а их произведение чётно, то оба числа должны быть чётными. Тогда их произведение даёт остаток 0 при делении на 4.

Таким образом, сумма двух произведений будет давать остаток 3 при делении на 4. Получили противоречие, так как 1001 даёт остаток 1 при делении на 4.

Комментарий. Верный ответ без обоснования — 0 баллов.

Доказано, что в одной из пар оба числа чётны — 1 балл.

Доказано, что в этой паре произведение делится на 4 — 1 балл.

Доказано, что в одной из пар оба числа нечётны — 1 балл.

Доказано, что в этой паре произведение имеет остаток 3 при делении на 4 — 3 балла.

8.5. На шахматную доску 8×8 поставили k ладей и k коней так, что ни одна из фигур не бьёт никакую другую. При каком наибольшем k такое возможно?

Ответ. 5.

Решение. Из условия следует, что в одной строке (столбце) с ладьёй не может стоять никакая другая фигура.

Предположим, что на доску поставили 6 ладей. Тогда они стоят в 6 строках и 6 столбцах. Поэтому непобитых клеток останется всего 4 (стоящих на пересечении двух пустых строк и двух пустых столбцов). В эти клетки нельзя поставить 6 коней. Поэтому k не больше 5.

На рис. 3 показано, как поставить на доску 5 ладей и 5 коней так, чтобы они не били друг друга.

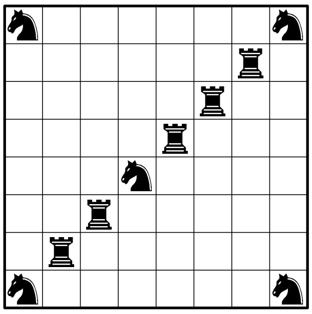

Рис. 3

Замечание. Существуют и другие примеры расстановки.

Комментарий. Доказано только, что k не больше 5 — 4 балла.

Приведён только пример расстановки 5 коней и 5 ладей — 3 балла.