9 класс.

1. Найти все пары действительных чисел (x, y), для которых выполняется равенство $\sqrt{x^2+y^2-1}=x+y-1$.

Ответ: подходят все пары чисел (1, t), (t, 1), где t – любое неотрицательное число.
Указание. Возведя в квадрат и разложив на множители, получим, что $x=1$ или $y=1$. Квадратный корень неотрицателен, поэтому сумма $x+y-1\geq 0$. Подставив в это неравенство возможные значения переменных, получим, что другая переменная неотрицательна.
Критерии. Не учтено, что арифметический корень неотрицателен: 3 балла.
Потерян один из наборов пар: 1 балл.
2. Числа от 1 до 8 расставили по кругу. Число назовём большим, если оно больше своих соседей, и маленьким, если оно меньше своих соседей. Каждое число в расстановке - большое или маленькое. Какова наименьшая возможная сумма больших чисел?

Ответ: 23.

Указания. Соседние числа не могут быть одного вида, и значит, большие и маленькие числа чередуются, и их - по четыре. 8 – большое. 7 -тоже большое, так как маленькое должно быть меньше двух чисел, а семь меньше только одного. 1 и 2 – маленькие. 3 и 4 не могут быть одновременно большими, так как больше только двух чисел, и соседними они в этом случае быть не могут. Значит, сумма двух других больших (кроме 7 и 8) не менее 8. И сумма больших не меньше 23. Пример: 8, 6, 7, 1, 3, 2, 5, 4.

Критерии. Только правильный ответ и пример: 2 балла.

3. На 20 карточках написали по одной цифре так, что каждая цифра написана ровно два раза. Одну карточку, на которой написана единица, потеряли. Можно ли, используя все оставшиеся 19 карточек, составить два числа, отношение которых равно 2018?

Ответ: нельзя.
Указания. От противного. Заметим, что сумма чисел, отношение которых равно 2018, делится на 3: $m+2018m=2019m$, а 2019 кратно 3. Всякое число даёт при делении на 3 такой же остаток, как и сумма всех его цифр (признак равно остаточности при делении на 3), поэтому сумма цифр составленных чисел должна быть кратна 3. А она равна 89. Противоречие.

Критерии. Если вместо признака равно остаточности ссылаются на признак делимости на 3, снимается два балла.

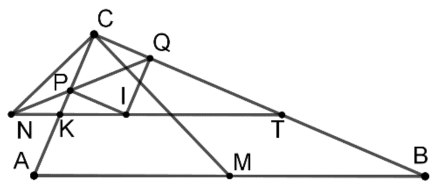
4. Доказать, что число 8000…01 (нулей между 8 и 1 не менее трёх) не является квадратом натурального числа.

Указание. От противного. Пусть $8000\ldots01=a^2$. Тогда $2^{n+3}5^n=8000\ldots00=a^2-1=(a-1)(a+1)$. Заметим, что при $n\geq 3$ $5^n=25\cdot 5^{n-2}>16\cdot 4^{n-2}=2^{2n}\geq 2^{n+3}$. Разность $(a+1)-(a-1)=2$, и пяти кратен только один из них - больший. Кроме того, понятно, что $a+1$ и $a-1$ - одной чётности, и значит, кратны двум. Значит, $a+1\geq 2\cdot 5^n$, $a-1<2^{n+2}$ , или $1-a>-2^{n+2}$. Сложив первое и последнее неравенства, получим: $2> 2\cdot 5^n-2^{n+2}>2^{n+4}-2^{n+2}>2^{n+3}$ и получили противоречие.

Критерии. Единица перенесена в правую часть, и она разложена на множители, но дальнейших продвижений нет: 1 балл.

5. Вписанная в прямоугольный треугольник ABC окружность касается катетов CA и CB в точках P и Q соответственно. Прямая PQ пересекает прямую, проходящую через центр вписанной окружности параллельно гипотенузе, в точке N. M – середина гипотенузы. Найти величину угла MCN.

Ответ: 90°.




Указания. Центр вписанной окружности обозначим через I. Точки пересечения прямой, параллельной гипотенузе и проходящей через I, с катетами AC и BC обозначим K и T соответственно. Будем считать, что точка N лежит на продолжении отрезка KT за точку K (см. рис.). Нетрудно убедится, что IPCQ – квадрат. PQ – ось симметрии квадрата, а точка N на ней лежит, и значит, треугольники NPI и NPC симметричны и, значит, равны. Имеем $\angle NCP=\angle NIP$. Углы NIP и ABC равны как острые с соответственно параллельными сторонами. Углы MBC и MCB равны, как углы при основании равнобедренного треугольника (свойство медианы, проведённой к гипотенузе). Сводя вместе полученные равенства углов, имеем $\angle MCB =\angle NCA$. Добавив к каждому из них угол ACM, с одной стороны получим прямой угол, с другой - $\angle NCM$. Отсюда ответ.

Критерии. Только ответ: 0 баллов.
Замечено, что IPCQ – квадрат: 1 балл.
Доказано равенство треугольников NPI и NPC: 2 балла.
6. Доказать, что если положительные числа a, b, c, d, f удовлетворяют равенству $a^2+b^2+c^2+d^2+f^2+abf+cdf=4$, то $ab+cd+f\leq 2$.

От противного. Пусть $ab + cd + f >2$. Используя это предположение, а также, что сумма квадратов двух чисел не меньше их удвоенного произведения, получим

$$4=a^2+b^2+c^2+d^2+f^2+abf+cdf= (a^2+b^2) + (c^2+d^2) +(f+ab+cd)f>$$

$$> 2ab+2cd +2f=2(ab+ cd +f)>2\cdot 2=4.$$ Получили 4>4. Противоречие.