

Всероссийская олимпиада школьников по математике.

II этап

10 класс

9.11.2018

*Работа рассчитана на 240 минут*

1. Найти все пары действительных чисел  $(x, y)$ , для которых выполняется равенство  $\sqrt{x^2 + y^2 - 1} = 1 - x - y$ .
2.  $a^3+1$  делится на  $b$ , и  $b^2+1$  делится на  $a$ , где  $a, b$  – целые числа. Доказать, что  $a^3+b^2+1$  делится на  $ab$ .
3. Пусть  $R(n)$  обозначает сумму остатков, когда  $n$  делится на 1, 2, ...,  $n$  соответственно. Докажите, что  $n^2/10 < R(n)$  для каждого целого  $n \geq 7$ .
4. Найти все функции  $f$ , определённые на множестве действительных чисел и принимающие действительные значения, такие что  $2f(x)+2f(y)-f(x)f(y) \geq 4$  для всех действительных  $x, y$ .
5. Трёхзвенная ломаная ABCD такова, что углы между соседними звеньями не меньше  $120^\circ$ . Доказать, что длина ломаной меньше суммы длин отрезков AC и DB.
6. В доме творчества 21 кружок. Их посещают 100 школьников, причём каждый ходит только в один кружок. Среди них 15 девочек, каждая знакома с 29 другими школьниками, и 85 мальчиков, каждый из которых знаком с 89 школьниками. Доказать, что найдётся кружок, в котором все между собой знакомы.

Всероссийская олимпиада школьников по математике.

II этап

10 класс

9.11.2018

*Работа рассчитана на 240 минут*

1. Найти все пары действительных чисел  $(x, y)$ , для которых выполняется равенство  $\sqrt{x^2 + y^2 - 1} = 1 - x - y$ .
2.  $a^3+1$  делится на  $b$ , и  $b^2+1$  делится на  $a$ , где  $a, b$  – целые числа. Доказать, что  $a^3+b^2+1$  делится на  $ab$ .
3. Пусть  $R(n)$  обозначает сумму остатков, когда  $n$  делится на 1, 2, ...,  $n$  соответственно. Докажите, что  $n^2/10 < R(n)$  для каждого целого  $n \geq 7$ .
4. Найти все функции  $f$ , определённые на множестве действительных чисел и принимающие действительные значения, такие что  $2f(x)+2f(y)-f(x)f(y) \geq 4$  для всех действительных  $x, y$ .
5. Трёхзвенная ломаная ABCD такова, что углы между соседними звеньями не меньше  $120^\circ$ . Доказать, что длина ломаной меньше суммы длин отрезков AC и DB.
6. В доме творчества 21 кружок. Их посещают 100 школьников, причём каждый ходит только в один кружок. Среди них 15 девочек, каждая знакома с 29 другими школьниками, и 85 мальчиков, каждый из которых знаком с 89 школьниками. Доказать, что найдётся кружок, в котором все между собой знакомы.