

Всероссийская олимпиада школьников по математике.

II этап

10 класс

9.11.2018

Работа рассчитана на 240 минут

1. Найти все пары действительных чисел (x, y) , для которых выполняется равенство $\sqrt{x^2 + y^2 - 1} = 1 - x - y$.
2. a^3+1 делится на b , и b^2+1 делится на a , где a, b – целые числа. Доказать, что a^3+b^2+1 делится на ab .
3. Пусть $R(n)$ обозначает сумму остатков, когда n делится на 1, 2, ..., n соответственно. Докажите, что $n^2/10 < R(n)$ для каждого целого $n \geq 7$.
4. Найти все функции f , определённые на множестве действительных чисел и принимающие действительные значения, такие что $2f(x)+2f(y)-f(x)f(y) \geq 4$ для всех действительных x, y .
5. Трёхзвенная ломаная ABCD такова, что углы между соседними звеньями не меньше 120° . Доказать, что длина ломаной меньше суммы длин отрезков AC и DB.
6. В доме творчества 21 кружок. Их посещают 100 школьников, причём каждый ходит только в один кружок. Среди них 15 девочек, каждая знакома с 29 другими школьниками, и 85 мальчиков, каждый из которых знаком с 89 школьниками. Доказать, что найдётся кружок, в котором все между собой знакомы.

Всероссийская олимпиада школьников по математике.

II этап

10 класс

9.11.2018

Работа рассчитана на 240 минут

1. Найти все пары действительных чисел (x, y) , для которых выполняется равенство $\sqrt{x^2 + y^2 - 1} = 1 - x - y$.
2. a^3+1 делится на b , и b^2+1 делится на a , где a, b – целые числа. Доказать, что a^3+b^2+1 делится на ab .
3. Пусть $R(n)$ обозначает сумму остатков, когда n делится на 1, 2, ..., n соответственно. Докажите, что $n^2/10 < R(n)$ для каждого целого $n \geq 7$.
4. Найти все функции f , определённые на множестве действительных чисел и принимающие действительные значения, такие что $2f(x)+2f(y)-f(x)f(y) \geq 4$ для всех действительных x, y .
5. Трёхзвенная ломаная ABCD такова, что углы между соседними звеньями не меньше 120° . Доказать, что длина ломаной меньше суммы длин отрезков AC и DB.
6. В доме творчества 21 кружок. Их посещают 100 школьников, причём каждый ходит только в один кружок. Среди них 15 девочек, каждая знакома с 29 другими школьниками, и 85 мальчиков, каждый из которых знаком с 89 школьниками. Доказать, что найдётся кружок, в котором все между собой знакомы.