Всероссийская олимпиада школьников по математике.

II этап **11 класс** **9.11.2018**

Работа рассчитана на 240 минут

1. Решить уравнение $\sqrt{sin^2x + lg^2x - 1} = sinx + lgx - 1.$

2. Имеются три попарно скрещивающихся прямых, не параллельных одной плоскости. Доказать, что их можно пересечь плоскостью так, чтобы её точки пересечения с прямыми были вершинами прямоугольного треугольника.

3. Пусть R (n) обозначает сумму остатков, когда n делится на 1, 2, …, n соответственно. Докажите, что R (п) $<n^2/4$ для каждого целого $n \geq 7$.

4. В доме творчества 21 кружок. Их посещают 100 школьников, причём каждый ходит только в один кружок. Среди них 15 девочек, каждая знакома с 29 другими школьниками, и 85 мальчиков, каждый из которых знаком с 89 школьниками. Доказать, что найдётся кружок, в котором все между собой знакомы.

5. Найти все функции f, определённые на множестве действительных чисел, такие что $f(xy)+f(xz)\geq 1+f(x)f(yz)$ для всех действительных x, y, z.

6. Некоторые клетки доски 11×35 отмечены. Назовем клетки соседними, если они имеют общую сторону. Оказалось, что у каждой клетки есть, по крайней мере, один отмеченный сосед. Доказать, что есть клетка, у которой, по крайней мере, два отмеченных соседа.

Всероссийская олимпиада школьников по математике.

II этап **11 класс** **9.11.2018**

Работа рассчитана на 240 минут

1. Решить уравнение $\sqrt{sin^2x + lg^2x - 1} = sinx + lgx - 1.$

2. Имеются три попарно скрещивающихся прямых, не параллельных одной плоскости. Доказать, что их можно пересечь плоскостью так, чтобы её точки пересечения с прямыми были вершинами прямоугольного треугольника.

3. Пусть R (n) обозначает сумму остатков, когда n делится на 1, 2, …, n соответственно. Докажите, что R (п) $<n^2/4$ для каждого целого $n \geq 7$.

4. В доме творчества 21 кружок. Их посещают 100 школьников, причём каждый ходит только в один кружок. Среди них 15 девочек, каждая знакома с 29 другими школьниками, и 85 мальчиков, каждый из которых знаком с 89 школьниками. Доказать, что найдётся кружок, в котором все между собой знакомы.

5. Найти все функции f, определённые на множестве действительных чисел, такие что $f(xy)+f(xz)\geq 1+f(x)f(yz)$ для всех действительных x, y, z.

6. Некоторые клетки доски 11×35 отмечены. Назовем клетки соседними, если они имеют общую сторону. Оказалось, что у каждой клетки есть, по крайней мере, один отмеченный сосед. Доказать, что есть клетка, у которой, по крайней мере, два отмеченных соседа.