МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ
2019/2020 УЧЕБНЫЙ ГОД
10 КЛАСС (решения)

1. (*7 баллов*) Винни-Пух съедает 3 банки сгущёнки и банку мёда за 25 минут, а Пятачок – за 55 минут. Одну банку сгущёнки и 3 банки мёда Пух съедает за 35 минут, а Пятачок за 1 час 25 минут. За какое время они съедят вместе 6 банок сгущенки?

Решение.

1 способ. Из условия следует, что 4 банки сгущёнки и 4 банки мёда Пух съедает за 1 час, а Пятачок – за 2 часа 20 минут. Значит, одну банку сгущёнки и одну банку мёда Пух съедает за 15 минут, а Пятачок – за 35 минут.
Используя первое из условий, получим, что 2 банки сгущёнки Пух будет есть 10 минут, а Пятачок – 20 минут. Так как Пух ест сгущёнку в 2 раза быстрее Пятачка, то за 20 минут они съедят 6 банок сгущёнки.

2 способ. Пусть Винни-Пух ест сгущёнку со скоростью V_1 банки в минуту, а мёд – со скоростью V_2 банки в минуту. Тогда

$$\begin{cases} \dfrac{3}{V_1} + \dfrac{1}{V_2} = 25, \\ \dfrac{1}{V_1} + \dfrac{3}{V_2} = 35 \end{cases} \Rightarrow V_1 = \frac{1}{5}.$$

Пусть Пятачок ест сгущёнку со скоростью U_1 банки в минуту, а мёд – со скоростью U_2 банки в минуту. Тогда

$$\begin{cases} \dfrac{3}{U_1} + \dfrac{1}{U_2} = 55, \\ \dfrac{1}{U_1} + \dfrac{3}{U_2} = 85 \end{cases} \Rightarrow U_1 = \frac{1}{10}.$$

Таким образом, Пятачок и Винни-Пух вместе съедят сгущёнку со скоростью $V_1 + U_1 = \dfrac{3}{10}$ банки в минуту. Тогда 6 банок сгущёнки они съедят за $6 : \dfrac{3}{10} = 20$ минут.

Ответ. 20 минут.

2. (*7 баллов*) Известно, что $a + b + c < 0$ и что уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ не имеет действительных корней. Определите знак коэффициента *c*.

Решение. Пусть $y = ax^2 + bx + c$, тогда $y(1) = a + b + c,\ y(1) < 0$.

Так как уравнение $ax^2+bx+c=0$ не имеет действительных корней, то ветви параболы направлены вниз и тогда $c<0$.

Ответ. $c<0$.

3. (*7 баллов*) Докажите, что если стороны прямоугольного треугольника составляют арифметическую прогрессию, то её разность равна радиусу вписанной окружности.

Решение. Пусть *a*, *в*, *c* – стороны прямоугольного треугольника, причём $b=a+d, c=a+2d$.

Тогда с одной стороны, $c^2=a^2+b^2=2a^2+2ad+d^2$.

С другой стороны, $c^2=(a+2d)^2=a^2+4ad+4d^2$.

Получаем, что $2a^2+2ad+d^2=a^2+4ad+4d^2$, $a^2-2ad-3d^2=0$.

Решая квадратное уравнение относительно *a*, получим: $a=3d, b=4d, c=5d$.

$$r=\frac{S}{p}=\frac{S}{\frac{a+b+c}{2}}=\frac{ab}{a+b+c}=\frac{12d^2}{12d}=d.$$

4. (*7 баллов*) Натуральные числа *m*, *n* таковы, что дробь $\frac{m}{n}$ несократима.

Сократима ли дробь $\frac{n}{2m+3n}$?

Решение. Пусть *n* делится на *d* и $2m+3n$ делится на *d*, $d\neq 1$. Тогда 3*n* делится на *d* и 2*m* делится на *d*.

Из того, что 2*m* делится на *d* следует, что 2 делится на *d*, т.е. *d* = 2 (*m* не делится на *d*, т.к. дробь $\frac{m}{n}$ несократима по условию).

Поскольку *n* делится на *d* и *d* = 2, то $n=2k$, т.е. дробь $\frac{n}{2m+3n}$ сократима при чётном *n*.

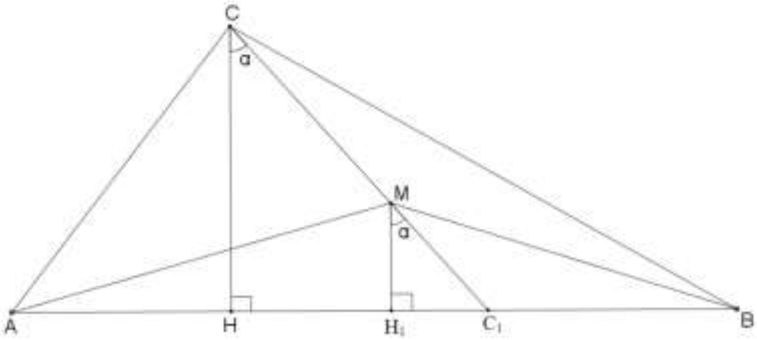
Ответ. Сократима при чётном *n*.

5. (*7 баллов*) Внутри треугольника *ABC* дана точка *M*. Докажите, что

$$\frac{S_{ACM}+S_{BCM}}{S_{ABM}}=\frac{CM}{C_1M},$$

где C_1 – точка пересечения прямых *AB* и *CM*.

Решение.



Проведём высоту CH в треугольнике ABC и высоту MH_1 в треугольнике AMB. Тогда

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot CH = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot CC_1 \cdot \cos\alpha,$$

$$S_{AMB} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot MH_1 = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot MC_1 \cdot \cos\alpha.$$

Получаем, что $\dfrac{S_{ABC}}{S_{AMB}} = \dfrac{CC_1}{MC_1}$.

$$\frac{CC_1}{MC_1} = \frac{S_{ABC}}{S_{AMB}} = \frac{S_{AMB} + S_{ACM} + S_{BCM}}{S_{AMB}} = 1 + \frac{S_{ACM} + S_{BCM}}{S_{AMB}}.$$

$$\frac{S_{ACM} + S_{BCM}}{S_{AMB}} = \frac{CC_1}{MC_1} - 1 = \frac{CC_1 - MC_1}{MC_1} = \frac{CM}{C_1M}.$$

Максимальное количество баллов – 35.