10 класс.

1. Иван и Петр бегут в разных направлениях по круговым дорожкам с общим центром, причем вначале они находятся на минимальном расстоянии друг от друга. Иван делает один полный круг каждые 20 секунд, а Пётр делает один полный круг каждые 28 секунд. Через какое наименьшее время они будут находиться на максимальном расстоянии друг от друга?

Ответ: 35/6 секунды.

Решение. Иван и Петр будут на минимальном расстоянии друг от друга в стартовых точках через НОК (20, 28) = 140 сек. За это время Иван сделает 7 кругов, а Петр - 5 кругов относительно точки старта. Рассмотрим это движение в системе отсчёта, где Петр неподвижен, тогда Иван сделает 12 кругов. Следовательно, через 140: 24 = 35/6 Иван пробежит половину круга. В этот момент они впервые будут на максимальном расстоянии друг от друга.

Критерии. Только ответ: 1 балл.

2. Рациональные числа a, b и c таковы, что $(a+b+c)\ (a+b-c)=4c^2$. Доказать, что a+b=0.

Решение. Начальное равенство равносильно следующему $(a+b)^2-c^2=4c^2$, или $(a+b)^2=5c^2$. Если $c\neq 0$, то получаем $((a+b)/c)^2=5$. $|(a+b)/c|=$ ¯. Слева стоит рациональное число, поскольку сумма, частное и модуль рациональных чисел - число рациональное, а справа – иррациональное, и равенство невозможно. Значит, c=0 и, следовательно, $(a+b)^2=0$, и a+b=0.

Критерии. Получено равенство $(a+b)^2=5c^2$, дальнейших продвижений нет: 1 балл.

3. Пусть $f(x)= x^2-px+q$. Оказалось, что $f(p+q)=0$ и $f(p-q)=0$. Найти p и q.

Ответ: Все пары вида $(m, 0)$, где m – любое число, и пара (0,–1).

Решение. Первый случай. Числа $p+q$ и $p-q$ равны. Тогда $q=0$. Корнями этого квадратного трёхчлена являются p и 0. И, значит, все пары $(m,0)$, где m – любое число, подходят.

Второй случай. Числа $p+q$ и $p-q$ различны. Тогда по теореме Виета $p+q+p-q=p$, $(p+q)(p-q)=q$. Из первого уравнения p=0. Из второго – $-q^2=q$. q=–1, q=0. Пара (0,0) к этому случаю не подходит. Пара (0,–1) – подходит.

Критерии. Не рассмотрен случай совпадения корней: 3 балла.

4. Найти все функции f, определённые на множестве действительных чисел и принимающие действительные значения такие, что для любых действительных x и y выполняется равенство $f(xy)=f(x)f(y)-2xy$.

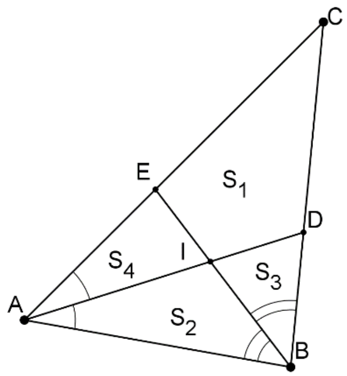
Ответ: Решениями являются линейные функции $f(x)=2x$ и $f(x)= -x$.

Решение. Подставим вместо x и y единицу. Тогда $f(1)=f(1)^2-2$. Значит, $f(1)=a$ - корень квадратного уравнения: $a^2-a-2=0$. Уравнение имеет два корня 2 и –1. Подставим вместо y в уравнение 1. Получим $f(x)=f(x)f(1)-2x$. Если f(1)=2, тогда $f(x)=2x$. Если $f(1)= -1$, тогда f(x)= –x. Проверкой убеждаемся, что обе функции подходят. Проверка для f(x)= –x. $f(xy)= -xy=xy-2xy=(-x)(-y)-2xy=f(x)f(y)-2xy$. Равенство верно для любых x и y. Проверка для f(x)=2x. $f(xy)=2xy=4xy-2xy=(2x)(2y)-2xy=f(x)f(y)-2xy$. Равенство верно для любых x и y.

Критерии. Функции найдены, но нет проверки, что они подходят: 6 баллов.

5. Биссектрисы AD и BE треугольника ABC пересекаются в точке I. Оказалось, что площадь треугольника ABI равна площади четырёхугольника CDIE. Найти AB, если CA=9, CB=4.

Ответ: 6.



Решение. Пусть $S(CDIE)=S_1$, $S(ABI)=S_2$, $S(BDI)=S_3$, $S(AIE)=S_4$ (см. рис.). Так как отношение площадей треугольников с общей высотой равно отношению оснований, а биссектриса делит противоположную сторону в отношении прилежащих сторон, имеем $(S_1+S_4)/(S_2+S_3)=CD/BD=AC/AB$. Аналогично $(S_2+S_4)/(S_1+S_3)=AE/EC = AB/BC$. Так как $S_1=S_2$, то $(S_1+S_4)/(S_2+S_3)= (S_2+S_4)/(S_1+S_3)$ откуда $AB/BC= AC/AB$. $AB/4= 9/AB$. $AB^2=36$, $AB=6$ (так как длина отрезка число положительное). Нетрудно убедиться, что такой треугольник существует ($4+6>9$).

Критерии. Длина стороны найдена верно, но нет проверки существования треугольника: 6 баллов.

6. В одной компании среди любых 9 человек есть два человека, которые знают друг друга. Доказать, что в этой компании найдется группа из восьми человек такая, что каждый из остальных знает кого-нибудь из этой группы.

Решение. Рассмотрим наибольшую группу G попарно незнакомых между собой людей. В ней не более восьми человек, иначе среди них есть девять человек, среди которых нет двух знакомых, что противоречит условию. Так как это максимальная группа, то любой из остальных знаком с кем-то из этой группы. В случае необходимости добавим в неё несколько человек, чтобы в ней стало восемь человек, и получим группу из восьми человек, так что остальные знакомы с кем-нибудь из этой группы.

Критерии.

Рассмотрение частного случая: 0 баллов.