Муниципальный этап всероссийской олимпиады школьников по математике

10 класс

10.1. Расставьте в клетки таблицы 5×5 целые числа так, чтобы сумма чисел во всей таблице была положительной, а сумма чисел в любом квадрате 3×3 была отрицательной.

Ответ: Например,

1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	-10	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1

.

Критерий.

7 баллов. Любой верный пример.

Комментарий. Существует несколько различных правильных примеров.

10.2. На доске есть числа $\sqrt{3}$ и $\sqrt{5}$. Разрешается дописать на доске сумму, разность или произведение любых двух **различных чисел**, уже выписанных на доске. Докажите, что можно выписать на доске число 1.

Решение. $\sqrt{3}$ *и* $\sqrt{5} \to \sqrt{5} \pm \sqrt{3} \to \left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right) = 2 \to 2\sqrt{3} \to 2\sqrt{3} \pm \sqrt{5} \to$
$\to \left(2\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)\left(2\sqrt{3}-\sqrt{5}\right) = 7 \to 7-2=5 \to 5-2=3 \to 3-2=1.$

Критерий.

1 балл. Получено одно целое число.

2 балла. Получена пара взаимно простых целых чисел.

7 баллов. Любой верный алгоритм получения 1.

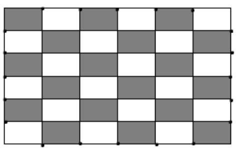
10.3. Лёша закрашивает клетки внутри квадрата 6×6, нарисованного на клетчатой бумаге. Потом он отмечает те узлы (пересечения линий клетчатой бумаги), к которым примыкает одинаковое количество закрашенных и не закрашенных квадратов. Какое наибольшее число узлов может оказаться отмеченным?

Ответ: 45.

Решение.

Оценка. Каждый узел сетки принадлежит одному, двум или четырем квадратам.

К угловым вершинам исходного квадрата примыкает всего по одному маленькому квадрату, значит, Лёше не удастся их отметить. Следовательно, наибольшее количество отмеченных узлов не превышает $7 \cdot 7 - 4 = 45$.

Пример.  .

При шахматной раскраске Лёше удастся отметить все узлы, кроме точек описанных выше.

Критерии.

3 балла. Приведён верный пример.

3 балла. Доказана оценка.

7 баллов. Полное верное решение.

10.4. Прямая пересекает гиперболу $y = \frac{k}{x}$ $(k \neq 0)$ в точках с абсциссами x_1 и x_2, а ось абсцисс – в точке с абсциссой x_3. Докажите, что $x_1 + x_2 = x_3$.

Решение. Прямая, очевидно, невертикальная, так как иначе она пересекла бы гиперболу только в одной точке. Пусть уравнение прямой $y = ax + b$. Тогда $0 = ax_3 + b$, откуда $b = -ax_3$ и уравнение прямой имеет вид $y = ax - ax_3$. Чтобы найти координаты точек пересечения прямой и заданной гиперболы достаточно решить систему $\begin{cases} y = \frac{k}{x}, \\ y = ax - ax_3. \end{cases}$. Подставим значение y из первого уравнения системы во второе. Второе уравнение примет вид $\frac{k}{x} = ax - ax_3$ или $ax^2 - ax_3x - k = 0$. Полученное квадратное уравнение должно иметь два корня x_1 и x_2. По теореме Виета $x_1 + x_2 = \frac{ax_3}{a} = x_3$.

Критерии.

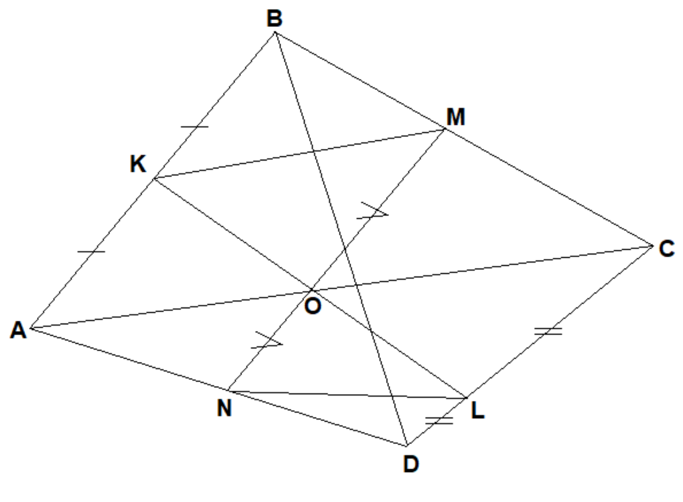
2 балла. Составлена система.

4 балла. Получено квадратное уравнение.

7 баллов. Полное верное решение.

Комментарий. Если не оговорен случай вертикальной прямой, баллы не снимать.

10.5. На сторонах BC и AD выпуклого четырехугольника $ABCD$ отмечены их середины – точки M и N соответственно. Отрезки MN и AC пересекаются в точке O, причем $MO = ON$. Известно, что площадь треугольника ABC равна 2019. Найдите площадь четырехугольника $ABCD$.



Ответ: 4038.

Решение. Пусть K и L – середины сторон AB и CD соответственно. Тогда $KMLN$ – параллелограмм, диагонали которого пересекаются в точке O.

Пусть $S_{BKM} = S$. Тогда $S_{OKM} = S$, так как треугольники OKM и BKM имеют общие основания и равные высоты. Аналогично

$S_{DNL} = S_{ONL}$. Но треугольники ONL и OKM равны (например, $KO = OL, ON = OM$ (как диагонали параллелограмма $KMLN$), $\angle KOM = \angle NOL$ (как вертикальные)). Поэтому $S_{DNL} = S_{ONL} = S_{OKM} = S_{BKM} = S$.

Далее, из подобия треугольников BKM и ABC (с коэффициентом $\frac{1}{2}$), следует, что $S_{ABC} = 4S_{BKM} = 4S$. Аналогично $S_{ADC} = 4S_{NDL} = 4S$.

Значит, треугольники ABC и ADC имеют равные площади. $S_{ABCD} = 2S_{ABC}$.

<u>Критерий.</u>

2 балла. Доказано, что середины сторон образуют параллелограмм, диагонали которого пересекаются в точке O.

Комментарий. Необходимо доказать, что $KLMN$ – параллелограмм, а также равенство всех пар, упоминаемых в решении треугольников.