Всероссийская олимпиада школьников 2019/2020 уч. г.
Муниципальный этап
Математика
10 класс

Общее время выполнения работы – 4 часа 00 мин.
Максимальная сумма баллов 35.

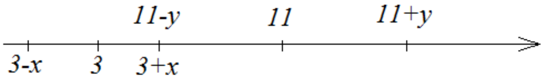
Во время Олимпиады участники не имеют права общаться друг с другом, свободно перемещаться по аудитории; не вправе пользоваться справочными материалами, средствами связи и электронно-вычислительной техникой. При установлении факта нарушения участником Олимпиады Порядка или использования во время тура запрещенных источников информации решением Оргкомитета такой участник лишается возможности дальнейшего участия в Олимпиаде.

Общие критерии оценки:
7 баллов ставится за полностью решенную задачу.
6-7 баллов ставится, если решение верное, но имеются небольшие недочеты.
5-6 баллов ставится, если решение в целом верное, но имеются существенные ошибки, не влияющие на логику рассуждений.
4 балла ставится, если верно рассмотрен один из двух (более сложный) случай, или в задаче типа «оценка + пример» верно получена оценка.
2-3 балла ставится, если получены вспомогательные утверждения, помогающие при решении задачи.
1 балл ставится, если рассмотрены отдельные случаи при отсутствии решения.
0 баллов, ставится, если нет продвижений в решении, даже если при этом дан верный ответ.
Решение школьника не обязано совпадать с предложенными, тогда оно оценивается также в соответствии указанной выше схемой оценок.

Задание 10.1
Может ли объединение двух треугольников оказаться 13-угольником?
Количество баллов 7
Ответ:
не может
Решение
Объединением двух треугольников является некоторый многоугольник. Его вершинами могут являться либо вершины исходных треугольников, либо точки попарного пересечения их сторон. Вершин у двух треугольников – 6. Каждая сторона одного треугольника может пересечь не более двух сторон другого, поэтому точек попарного пересечения сторон не более, шести. Значит, всего вершин у полученного многоугольника не более 12.

Задание 10.2
Функция $f(x)$ определена для всех действительных чисел, причем для любого х выполняются равенства $f(x + 3) = f(3 - x)$ и $f(x + 11) = f(11 - x)$. Докажите, что $f(x)$ периодическая функция.
Количество баллов 7
Решение
Докажем, что данная функция имеет период 16. Можно рассуждать по-разному.
Первый способ.
$f(x + 16) = f((x + 5) + 11) = f(6 - x) = f((3 - x) + 3) = f(x)$.
Второй способ.
Первое равенство означает, что точки с координатами $(x + 3, f(x + 3))$ и $(3 - x, f(3 - x))$ симметричны относительно прямой $x = 3$, то есть эта прямая является осью симметрии

графика $y = f(x)$. Аналогично из второго равенства следует, что прямая $x = 11$ также является осью симметрии этого графика. Композиция двух указанных симметрий с параллельными осями является параллельным переносом на 16 вправо (см. рисунок).



$f(3-x)=f(11+y)$

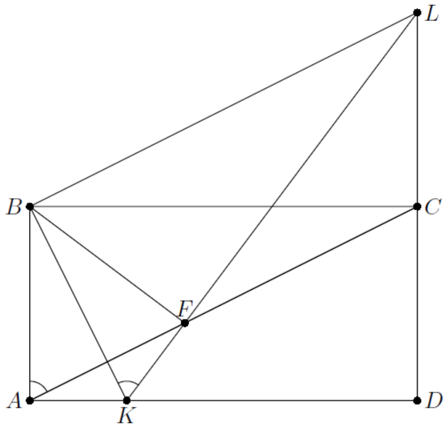
Таким образом, график нашей функции переходит в себя при сдвиге на 16 вправо. Это и значит, что она периодическая с периодом 16.

Задание 10.3

Дан прямоугольник $ABCD$. Через точку B провели две перпендикулярные прямые. Первая прямая пересекает сторону AD в точке K, а вторая продолжение стороны CD в точке L. Пусть F – точка пересечения KL и AC. Докажите, что $BF \perp KL$.

Количество баллов 7

Решение



Так как $\angle ABK = \angle CBL$, треугольники ABK и CBL подобны. Значит, треугольники ABC и KBL также подобны и $\angle BKF = \angle BAF$. Следовательно, четырёхугольник $ABFK$ – вписанный и $\angle BFK = 90°$ (см. рис.).

Задание 10.4

Последовательность чисел $\{a_n\}$ задана условиями $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \dfrac{3a_n}{4} + \dfrac{1}{a_n}$ $(n \ge 1)$

Докажите, что а) последовательность $\{a_n\}$ ограничена; б) $|a_{1000} - 2| < 2^{-1000}$.

Количество баллов 7

Решение

Очевидно, что $a_n > 0$. По неравенству Коши для всех n

$$a_{n+1} = \frac{3a_n}{4} + \frac{1}{a_n} \ge 2\sqrt{\frac{3a_n}{4} \cdot \frac{1}{a_n}} = \sqrt{3} > 1$$

Рассмотрим

$$a_{n+1} = 2 + \frac{3a_n}{4} + \frac{1}{a_n} - 2 = 2 + \frac{3a_n^2 - 8a_n + 4}{4a_n} = 2 + \frac{(a_n - 2)(3a_n - 2)}{4a_n}$$

Методом индукции докажем, что $a_n < 2$ для всех n, действительно

1) $a_1 < 2$
2) Пусть $a_n < 2$
3) Тогда

$$a_{n+1} = 2 + \frac{(a_n - 2)(3a_n - 2)}{4a_n} < 2, \text{ поскольку } a_n - 2 < 0, \quad 3a_n - 2 > 0.$$

Так как $a_n < 2$, то $\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2a_n}\right) < \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

Кроме этого $|a_2 - 2| = \left|\frac{7}{4} - 2\right| = \frac{1}{4}$

Получаем $|a_{n+1} - 2| = |a_n - 2| \frac{(3a_n - 2)}{4a_n} = |a_n - 2| \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2a_n}\right)$

Поэтому $|a_{n+1} - 2| < |a_n - 2| \frac{1}{2} < |a_{n-1} - 2| \left(\frac{1}{2}\right)^2 < \ldots < |a_2 - 2| \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

Отсюда следует, что $|a_{n+1} - 2| < \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

А значит $|a_{1000} - 2| < 2^{-1000}$

Задание 10.5

Поле представляет собой клетчатый квадрат 41×41, в одной из клеток которого замаскирован танк. Истребитель за один выстрел обстреливает одну клетку. Если произошло попадание, танк переползает на соседнюю по стороне клетку поля, если нет – остаётся на месте. При этом после выстрела пилот истребителя не знает, произошло ли попадание. Для уничтожения танка надо попасть в него два раза. Каким наименьшим числом выстрелов можно обойтись для того, чтобы гарантировать, что танк уничтожен?

Количество баллов 7

Ответ:

2521 выстрел

Решение

Пример.

Окрасим клетки в шахматном порядке так, чтобы углы поля были чёрными. Пусть пилот сначала выстрелит по всем белым полям, затем по всем чёрным, а затем снова по всем белым. Если танк был на белом поле, то пилот его подобьёт в первой и второй сериях; если же на чёрном – то во второй и третьей сериях. При этом пилот совершит не более чем $41^2 + \frac{1}{2}(41^2 - 1) = \frac{1}{2}(3 \cdot 41^2 - 1) = 2521$ выстрел.

Оценка.

Пусть у пилота есть последовательность выстрелов, после которой танк будет гарантированно уничтожен. Ясно, что по любой клетке он должен выстрелить хотя бы раз (иначе танк в этой клетке не будет уничтожен). Предположим, что есть две соседних клетки *A* и *B*, по которым он стрелял ровно по разу, причём выстрел по *B* произошёл позже. Тогда, если танк изначально находился в *B*, он мог после выстрела по *B* переползти в *A*, и второго попадания не произошло бы. Значит, таких пар клеток нет. Разобьём всю доску на $\frac{1}{2}(41^2 - 1)$ доминошек 1×2 и одну клетку. В каждую доминошку истребитель должен сделать как минимум три выстрела, а в оставшуюся клетку – хотя бы один выстрел. Итого, он сделал не менее чем $\frac{1}{2}\, 3 \cdot (41^2 - 1) + 1 = \frac{1}{2}(3 \cdot 41^2 - 1)$ выстрелов.