Муниципальный этап всероссийской олимпиады школьников по математике 2019-2020 учебный год

Решения

10 класс

1. *Ответ: может.*
   Решение. Рассмотрим набор гирек: 1 г, 3 г, 4г и 11 гирек по 9 г,
   При помощи их можно набрать 100, 102, 103 и 104 г.
   Покажем, что при помощи их нельзя набрать 101 и 105 г. Так как суммарный вес всех гирь 107 г, то, если не взять хотя бы одну гирьку в 9 г, можно будет набрать массу не более 98 г. Если же взять все 11 гирек по 9 г, то оставшимися гирьками нельзя набрать массы в 2 г и в 6 г.
2. *Решение.* Допустим, что все числа различны. Не теряя общности, можно считать, что a— наибольшее из них. Тогда $a \geq 4$ и $a \geq c$-1, $a \geq d$ -1.
   $a^a \geq 4a^{a-1} > a^{a-1} + a^{a-1} > c^{a-1} + d^{a-1} \geq c^c + d^d$, тогда $a^a + b^b > c^c + d^d$, противоречие.

3. *Решение.* Пусть на доске написано число $y = a + x$, где a — его целая часть, x — дробная. Следующее число на доске будет равно $y/x = (a+x)/x = a/x + 1 > a + 1$. То есть число с каждым действием увеличивается больше, чем на 1. Тогда, если ни разу не получилось целое число, после 1000000 действий получится число, большее 1000000.

4. *Решение.* Пусть E - точка на BC, что $BE = BD$.
   $\angle ADB = \angle DBC = 20°$, так как BD — биссектриса.

   $\angle BAD = 100°$ (из треугольника ABC), $\angle ADB = 60°$ (из треугольника BAD),
   $\angle BDE = \angle BED = 80°$ (из равнобедренного треугольника BDE),
   $\angle EDC = 180° - \angle ADB - \angle BDE = 40° = \angle DCE$. Треугольник EDC — равнобедренный, $ED = EC$.
   Найдем сумму углов ABE и ADE: 40° + 60° + 80° = 180°. Вокруг четырехугольника $BADE$ можно описать окружность. Так как $\angle ABD = \angle DBE$, то равны и хорды, на которые они опираются, $AD = DE$. Получаем $BC = BE + EC = BD + AD$, что и требовалось доказать.

5. *Решение.* Пусть a_1, a_2, a_3, … (a_i — номер линии, в которой происходит перекрашивание) — последовательность перекрашиваний, после которой вся таблица стала черной. Рассмотрим начало это последовательности, в котором впервые встретились 10 строк или 10 столбцов. Для определенности, пусть впервые встретились 10 столбцов, тогда строк в этом начале меньше 10.
   Будем рассматривать только эти строки и столбцы (будем называть их выделенными).
   Покажем, что в них есть по крайней мере 100 черных клеток.
   Посмотрим на действие a_1, предположим, что это строка. В этой линии есть 10 черных клеток. Если на пересечении с выделенными столбцами есть белые клетки, то мы можем поменять их местами с теми черными клетками, которые есть в этой строке вне выделенных столбцов. Таким образом количество черных клеток в таблице не изменилось, новая таблица при помощи тех же самых действий, что и первоначальная, становится черной, но теперь на пересечении строки a_1 и всех выделенных столбцов стоят черные клетки. (Если a_1 это был столбец, то поступаем аналогично)
   Далее делаем такое же изменение раскраски таблицы для линий a_2, a_3, и так далее.
   В итоге получится таблица, на пересечении выделенных линий которой все клетки черные. Это означает, что перекрашивание выделенной строки не добавляет черных клеток в выделенных столбцах, а, значит в них должно быть изначально по крайней мере по 10 черных клеток, то есть всего в этих столбцах в новой таблице по крайней мере 100 черных клеток. Так как мы при изменении раскраски таблицы не меняли количества черных клеток, то и в первоначальной таблице по крайней мере 100 черных клеток.