Ответы муниципального этапа ВсОШ по математике
10 класс

10.1. Дан квадратный трехчлен $p(x) = ax^2 + bx + c$, где a, b, c – целые нечетные числа. Будут ли его корни x_1 и x_2 (предполагается, что они существуют) – целыми числами?

Ответ. Не будут.

Доказательство. Предположим, что нашелся такой квадратный трехчлен $p(x) = ax^2 + bx + c$, что a, b, c – целые нечетные числа, а x_1 и x_2 – его целые корни. Но тогда произведение $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$ нечетно, откуда x_1 и x_2 нечетные. Их сумма четна, но $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ нечетно – противоречие.

10.2. Выполняется ли неравенство

$$x^3(y+1) + y^3(x+1) \geq x^2(y+y^2) + y^2(x+x^2)$$

для неотрицательных x и y?

Ответ. Да.

Решение. $x^3(y+1) + y^3(x+1) - \left(x^2(y+y^2) + y^2(x+x^2)\right) = = (x-y)^2(xy+x+y) \geq 0$, так как $(x-y)^2 \geq 0$ и $(xy+x+y) \geq 0$.

10.3. Анна, Берта, Вика, Галя и Даша (в произвольном порядке) караулят момент, когда распустится редкий цветок в их оранжерее. Каждая из девочек наблюдала за цветком по одному разу, причем Анна караулила в два раза дольше Берты, Берта ждала распускания цветка в два раза дольше, чем Вика, а Галя, Даша и Вика караулили цветок одинаковое количество времени. Научный руководитель отмечал девочек строго в начале каждого часа по сигналу точного времени, а смена девочек на сигналы не попадала. Мог ли научный руководитель отметить каждую девочку ровно по одному разу?

Ответ. Не мог.

Решение. Пусть научный руководитель отметил каждую девочку по одному разу. Тогда Анна караулила меньше 2 часов, Берта – меньше часа, но тогда Вика, Галя и Даша – меньше получаса. Так как Вика, Галя и Даша караулили меньше чем по полчаса, то никакие двое из них не могли караулить подряд. Значит они следили за цветком первой, третьей и пятой по счету. Значит Анна и Берта несли караул второй и четвертой. Но тогда получается, что Берта и те двое, что были перед ней и после нее, вместе прокараулили меньше двух часов и научный руководитель не мог за это время отметить трех девочек. Противоречие.

10.4. В пятиугольнике *MNPQS:* *MN=NP=PQ=QS=SM* и ∠*MNP=2*∠*QNS*. Найдите величину угла *MNP*.

Ответ. 60°

Решение. Так как $\angle SNQ = \angle MNS + \angle PNQ$, то на стороне SQ можно взять точку T так, что $\angle SNT = \angle MNS = \angle MSN$, т. е. $NT \| MS$.
Тогда $\angle TNQ = \angle SNQ - \angle SNT = \angle PNQ = \angle NQP$, т. е. $NT \| PQ$.
Следовательно, $MS \| PQ$, а так как $MS = PQ$, то $PQSM$ — параллелограмм. Поэтому $MP = SQ$, т. е. треугольник MNP равносторонний и $\angle MNP = 60^\circ$.

10.5. Командам, участвующим в викторине, необходимо ответить на 50 вопросов. Стоимость (в целочисленных баллах) правильного ответа на каждый вопрос эксперты определяли после проведения викторины, стоимость неправильного ответа – 0 баллов. Итоговый балл команды определялся сложением баллов, полученных за правильные ответы. При подведении итогов обнаружилось, что присвоить стоимости правильным ответам можно так, чтобы команды заняли места согласно любым пожеланиям экспертов. Какое наибольшее число команд могло участвовать в викторине?

Ответ. 50.

Решение. Докажем, что при 50 командах такое распределение баллов может существовать. Пример очевиден – пусть k-ая команда ответит только на один k-й вопрос. Тогда, назначив стоимость вопросов $a_1, a_2, ..., a_{50}$, где $\{a_1, a_2, ..., a_{50}\} = \{1, 2, ..., 50\}$, жюри поставит k-ую команду на место $50 + 1 - a_k$.

Пусть команд 51. Представим себе, что мы клонировали каждую команду, то есть у нас есть неограниченное количество команд каждого из 51 типов (внутри типа все отвечают на вопросы одинаково). Докажем, что можно составить из них две группы, разные по составу (хотя бы для одного типа число команд этого типа в первой группе не равно числу команд этого типа во второй группе), но имеющих одинаковые результаты (то есть на каждый вопрос в первой группе ответило столько же команд, сколько во второй).

Действительно, запишем систему линейных уравнений, i-е уравнение которой гласит, что разность числа команд первой и второй групп, ответивших на i-й вопрос есть ноль; здесь x_j – число команд j-го типа (в первой группе, если x_j окажется положительным, во второй – если отрицательным). Коэффициенты – нули и единицы – определяются тем, ответила ли команда j-го типа на i-й вопрос. Это система из 50 однородных уравнений с 51 неизвестным. Она имеет ненулевое решение, причём, поскольку все коэффициенты рациональны, существует рациональное ненулевое решение. Так как уравнения однородны, то вектор решений можно умножить на константу. Умножим так, чтобы значения всех x_j стали целыми. Требуемые группы найдены. При этом команды каждого типа присутствуют не более чем в одной группе. Пусть в первой группе команд не меньше, чем во второй. Тогда нельзя назначить баллы за вопросы так, чтобы места всех команд первой группы были выше, чем места команд второй группы, ибо сумма баллов команд первой группы всегда равна сумме баллов команд второй группы.

В случае, когда команд больше 51, можно рассмотреть только 51 команду, а уже для них условие задачи не выполняется.