10 класс

10.1. Графики функций $f(x)=ax^2+bx$, $g(x)=cx^2+dx$, $f_1(x)=ax+b$, $g_1(x)=cx+d$, пересекаются в одной точке с отрицательной абсциссой. Докажите, что если $ac\neq 0$, то $bc=ad$.

Решение. Найдем абсциссу x_0 точки пересечения $f(x)$ и $f_1(x)$: $ax^2+bx=ax+b \Leftrightarrow (ax+b)(x-1)=0$. То есть либо $x_0=1$, либо $x_0=-\frac{b}{a}$ ($ac\neq 0$). Так как по условию абсцисса точки пересечения отрицательна, $x_0\neq 1$. Значит, $x_0=-\frac{b}{a}$. Аналогично, рассмотрев $g(x)$ и $g_1(x)$, получим, что $x_0=-\frac{d}{c}$. Поэтому $-\frac{b}{a}=-\frac{d}{c}$, откуда получаем $bc=ad$.

Комментарий. Получено и решено уравнение для нахождения абсциссы x_0 точки пересечения – 2 балла.

10.2. В турнире по шахматам каждый из 10 игроков сыграл с каждым по одной партии, и Петя занял последнее место (набрал меньше очков, чем любой другой участник). Потом одного игрока дисквалифицировали, и все очки, набранные во встречах с ним, аннулировали, и этого игрока исключили из таблицы. Мог ли в результате Петя стать победителем турнира (набрать больше очков, чем любой другой участник)?

Ответ. Не мог.

Решение. В турнире с 10 игроками, проходящем в 1 круг, разыгрывается $\frac{10\cdot 9}{2}=45$ очков. Поэтому найдется игрок, набравший не более $45:10=4{,}5$ очков. Значит, Петя, занявший абсолютное последнее место, набрал не более 4 очков. Аналогично, в турнире с $10-1=9$ игроками, проходящем в 1 круг, разыгрывается $\frac{9\cdot 8}{2}=36$ очков. Остальные 8 игроков набрали не менее 32 очков. Значит, найдется игрок (отличный от Пети), набравший (после пересчета) не менее $32:8=4$ очков. Поэтому Петя не мог стать абсолютным победителем турнира.

Комментарий. Верный ответ без обоснований – 0 баллов.
Верно доказана только одна из двух оценок на количество очков у Пети – 3 балла.

10.3. Каждый из 13 ребят задумал целое число. Оказалось, что сумма задуманных чисел равна 125. После чего каждый изменил свое число: либо разделил его на 3, либо умножил его на 5. Могла ли сумма полученных 13 чисел равняться 175?

Ответ. Не могла.

Решение. Предположим, что сумма могла стать равной 175. Умножим каждое из полученных чисел на 3 (тогда сумма станет равной 525). Это будет равносильно тому, что некоторые задуманные ребятами числа остались без изменений, а некоторые умножились на 15. Если число x умножается на 15, то сумма изменяется на $14x$, то есть на число, кратное 14. Так как часть чисел не менялась, а часть умножалась на 15, то итоговая сумма изменилась на число, кратное 14. Однако изменение суммы, равное $525-125=400$, на 14 не делится. Противоречие.

Комментарий. Верный ответ без обоснований – 0 баллов.

В решении предполагается (или неявно используется), что после изменения все числа также целые – не более 2 баллов за задачу.

10.4. Числа x, y, z таковы, что $2x > y^2+z^2$, $2y > x^2+z^2$, $2z > y^2+x^2$. Докажите, что $xyz < 1$.

Первое решение. Из условия следует, что числа x, y, z положительны. Заметим, что $y^2+z^2 \geq 2yz$ (это неравенство равносильно $(y-z)^2 \geq 0$). Отсюда $x > yz$. Аналогично, $y > xz$, $z > yx$. Перемножив неравенства (обе части неравенств положительны), получим $xyz > (xyz)^2$. Отсюда следует требуемое.

Второе решение. Из условия следует, что числа x, y, z положительны. Сложив первое и второе неравенство и преобразовав, получим $2 > (y-1)^2+(x-1)^2+2z^2$. Отсюда $z^2 < 1$, то есть $z < 1$. Аналогично $x < 1$, $y < 1$. Перемножив неравенства, получаем требуемое.

Комментарий. Замечено, что числа x, y, z положительны – 0 баллов.

В решении неявно предполагается, но не упоминается, что числа x, y, z положительны – снять 1 балл.

10.5. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность Ω с центром O, при этом BD – диаметр окружности. Лучи AB и DC пересекаются в точке S. Окружность ω, проходящая через точки A, O, C, пересекает отрезок CD в точке M $(M \neq C)$. Докажите, что M – середина отрезка DS.

Решение. Из условия следует, что четырехугольник $AOMC$ – вписанный (см. рис. 3), поэтому $\alpha = \angle OAC = 180° - \angle OMC = \angle OMD$ (смежные углы). Треугольник OAC – равнобедренный, ($OA = OC$ как радиусы). Значит, $\angle OCA = \alpha$. Аналогично, $\angle OCD = \angle ODC = \beta$. Тогда $\angle ACD = \angle ACO + \angle OCD = \alpha + \beta$. Далее $\angle CAS = \angle CAB = \angle CDB = \beta$ (вписанные углы). Угол ACD – внешний для треугольника ACS, поэтому $\alpha + \beta = \angle ACD = \angle CAS + \angle CSA$, т.е. $\alpha + \beta = \beta + \angle CSA$. Итак, $\angle CSA = \alpha = \angle OMD$. Это означает, что $MO \parallel SA$. Но O – середина BD, значит, MO – средняя линия треугольника BSD. Следовательно, точка M – середина SD.

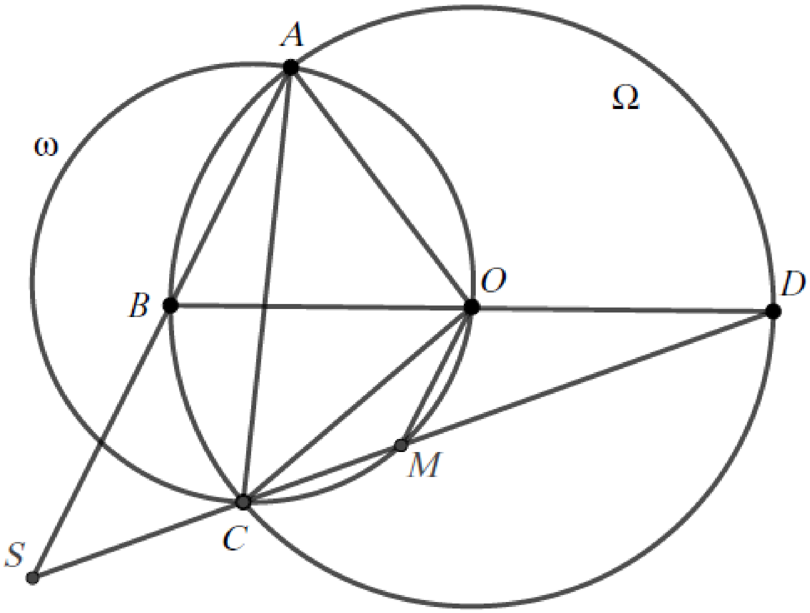

Рис. 3

Комментарий. Доказано, что $\angle OAC = \angle OMD$ – 2 балла.