2019 г.

Всероссийская олимпиада школьников по математике
муниципальный этап
Решения

11 класс

1. Так как $0 < sin\ \frac{20}{19} < 1$, $0 < cos\ \frac{20}{19} < 1$, то $ctg\ \frac{20}{19} = cos\ \frac{20}{19} : sin\ \frac{20}{19} > cos\frac{20}{19}$ и $tg\ \frac{20}{19} = sin\ \frac{20}{19} : cos\ \frac{20}{19} > sin\ \frac{20}{19}$. Поскольку $\frac{20}{19} > \frac{\pi}{3}$, то

$$ctg\ \frac{20}{19} < ctg\ \frac{\pi}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}} < \frac{\sqrt{3}}{2} = sin\ \frac{\pi}{3} < sin\ \frac{20}{19}.$$

Таким образом, порядок чисел будет таким: $cos\ \frac{20}{19}$, $ctg\ \frac{20}{19}$, $sin\ \frac{20}{19}$, $tg\ \frac{20}{19}$.

2. Преобразуем уравнение к виду: $(1 + x^2)(1 + x) = 2^y$, откуда $1 + x^2 = 2^m$, где m – целое неотрицательное число и $1 + x = 2^n$, где n – целое неотрицательное число. Так как $x = 2^n - 1$, то $x^2 = (2^n - 1)^2 = 2^{2n} - 2 \cdot 2^n + 1$. Учитывая, что $1 + x^2 = 2^m$, получим $2^{2n} - 2 \cdot 2^n + 2 = 2^m$. Разделив обе части уравнения на 2, получим: $2^{2n-1} - 2^n + 1 = = 2^{m-1}$, которое равносильно уравнению $2^n(2^{n-1} - 1) + 1 = 2^{m-1}$. Так как m – целое неотрицательное число, то при $m > 1$ 2^{m-1} – четное число, поэтому $2^n(2^{n-1} - 1)$ – число нечетное. А это невозможно. Значит, осталось рассмотреть $m = 0$ и $m = 1$. При $m = 0$ имеем $1 + x^2 = 2^0$, откуда $x = 0$, $y = 0$. А при $m = 1$ получим, что $x^2 = 1$ и, учитывая, что x – число натуральное, получаем $x = 1$, $y = 2$.

3. Пусть стороны треугольника равны $n - 1$, n, $n + 1$. Тогда его полупериметр $p = \frac{n-1+n+n+1}{2} = \frac{3n}{2}$. Пусть S – площадь треугольника. По формуле Герона получаем: $S^2 = \frac{3n}{2} \cdot \left(\frac{3n}{2} - n + 1\right) \cdot \left(\frac{3n}{2} - n\right) \cdot \left(\frac{3n}{2} - n - 1\right) = \frac{3n}{2} \cdot \frac{n+2}{2} \cdot \frac{n}{2} \cdot \frac{n-2}{2} = \frac{3n^2(n^2-4)}{16}$.

Так как $S = pr$, то $r^2 = \frac{S^2}{p^2} = \frac{3n^2(n^2-4)}{16} : \frac{9n^2}{4} = \frac{n^2-4}{12}$. Откуда получаем: $n^2 = 12r^2 + 4$.

Так как $S = \frac{abc}{4R}$, то $R = \frac{abc}{4S} = \frac{(n-1)n(n+1)}{4pr} = \frac{n(n^2-1)}{4 \cdot \frac{3n}{2} \cdot r} = \frac{n(n^2-1)}{6nr} = \frac{n^2-1}{6r} = \frac{12r^2+4-1}{6r} = 2r + \frac{1}{2r}$. Что и требовалось доказать.

4. Число 1 делится на 3 с остатком 1, число 9 делится на 3 нацело, число 20 делится на 3 с остатком 2. То есть, исходные числа имеют разные остатки при делении на 3.

Что же произойдет с этими остатками за один ход? Они все изменятся, но останутся различными. Таким образом имеем инвариант: через любое число ходов числа камней в кучках дают разные остатки при делении на 3. Если же все камни собрать в одной кучке, то в двух других будет по 0 камней, что даст одинаковые остатки при делении на 3 (остатки будут равны все 0). Значит, собрать все камни в одной кучке нельзя.

5. Назовем белые и красные полосы ткани *зелеными.* Обозначим через T_n количество способов, которыми можно украсить витрину магазина при наличии n полос ткани. Первой полосой может быть только зеленая полоса. Если вторая полоса синяя, то далее должны следовать полосы, причем первая из них зеленая. Всего способов развесить так полосы будет T_{n-2}. Если вторая полоса тоже зеленая, то вместе с ней оставшихся полос будет $n-1$ и развесить их можно T_{n-1} способами. Итак, получаем:

$$T_n = T_{n-1} + T_{n-2} \text{ (*)}.$$

Очевидно, что при $n = 1$ $T_1 = 2$ (одна полоса может быть либо белой, либо красной), при $n = 2$ $T_2=2$ (две полосы могут быт либо белой и красной, либо красной и белой). Тогда все последующие T_n находим по формуле (*):

$$T_3 = T_2 + T_1 = 2 + 2 = 4,\ T_4 = T_3 + T_2 = 4 + 2 = 6,\ T_5 = T_4 + T_3 = 6 + 4 = 10,$$
$$T_6 = T_5 + T_4 = 10 + 6 = 16,\ T_7 = T_6 + T_5 = 16 + 10 = 26,\ T_8 = T_7 + T_6 = 26 + 16 = 42,$$
$$T_9 = T_8 + T_7 = 42 + 26 = 68,\ T_{10} = T_9 + T_8 = 68 + 42 = 110.$$