11 класс

1. Доказать, что если $2^x+y<z$ и $2^y+z<x$, то $2^z+x>y$.

Решение. Способ 1. От противного. Предположим противное. Пусть верно неравенство $2^z+x \le y$. Сложив его и два неравенства из условия $2^x+y<z$, $2^y+z<x$, получим $2^x+y+2^z+x+2^y+z<x+z+y$, или $2^x+2^z+2^y<0$, что неверно.

Способ 2. Из первого неравенства имеем $z-y>2^x>0$, значит, $z>y$. Аналогично из второго имеем $x>z$. По транзитивности неравенств имеем $x>y$ и, сложив его с неравенством $2^z>0$ получим $2^z+x>y$.

Критерии.

Рассмотрение частных случаев: 0 баллов.

2. В тетраэдре совпали центры описанной и полувписанной сфер. Верно ли, что тетраэдр правильный? (Полувписанная в тетраэдр сфера – это сфера, касающаяся всех его рёбер.)

Решение. Пусть O – общий центр сфер, R - радиус описанной сферы, r – радиус полувписанной сферы. Пусть MN - одна из сторон тетраэдра и L - точка касания полувписанной сферы со стороной MN. OL перпендикулярна MN. Из прямоугольных треугольников OLM и OLN по теореме Пифагора находим ML=NL= – . Отсюда все стороны тетраэдра равны 2 – и, значит, тетраэдр правильный.

3. Решить уравнение *sinx+cosx+sinx cosx*=2.

Ответ: у этого уравнения нет корней.

Решение. Уравнение $(\sin x-\cos x)^2+(\sin x-1)^2+(\cos x-1)^2=0$ не имеет решений так как sinx и cosx не могут равняться единице одновременно. После раскрытия скобок и упрощений получим уравнение sinx+cosx+sinxcosx=2.

Второй способ. Пусть t=sinx+cosx. Тогда $t^2=1+2\sin x\cos x$,.или $\sin x\cos x=(t^2-1)/2$ Получаем уравнение относительно t: $t+(t^2-1)/2=2$, или $t^2+2t-5=0$ откуда t= –1± . Используя формулу вспомогательного аргумента, имеем |t|= |sin(π/4)cosx+cos(π/4)sinx|= |sin(x+π/4)|≤ . Так как – – – , то исходное уравнение корней не имеет.

Критерии. Уравнение сведено к квадратному, но решение не закончено или закончено неверно: 3 балла.

4. Найти все функции *f*, определённые на множестве действительных чисел и принимающие действительные значения такие, что для любых действительных *x*, *y* и *z* выполняется равенство $f(xyz)=f(x)f(y)f(z)-6xyz$.

Ответ: $f(x)=2x$.

Решение. Пусть f(1)=a. Положим в равенстве y=z=1 и получим $f(x)=a^2f(x)-6x$. Откуда $(a^2-1)f(x)=6x$.

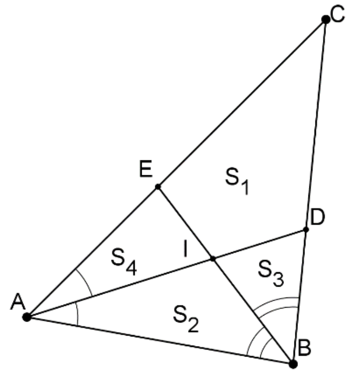
Если $a^2-1\neq0$, то f(x)=kx для некоторого k. Если $a^2-1=0$, то равенство не выполняется при всех $x\neq0$.

Найдём для каких k равенство выполняется при всех x,y,z. $kxyz=k^3xyz-6xyz$. При xyz=0 равенство выполняется всегда. При $xyz\neq0$ получим $k=k^3-6$, или $k^3-k-6=0$. Это уравнение имеет единственный корень 2. $k^3-8-k+2=0$. $(k-2)(k^2+2k+4)-(k-2)=0$. $(k-2)(k^2+2k+3)=0$. $k^2+2k+1+2=(k+1)^2+2>0$.

Критерии. Нет проверки, что функция подходит, при другом способе решения: 6 баллов.

5. Биссектрисы AD и BE треугольника ABC пересекаются в точке I. Оказалось, что площадь треугольника ABI равна площади четырёхугольника CDIE. Найти наибольшее возможное значение угла ACB.

Ответ: 60°.



Решение. Пусть $S(CDIE)=S_1$, $S(ABI)=S_2$, $S(BDI)=S_3$, $S(AIE)=S_4$ (см. рис.). Так как отношение площадей треугольников с общей высотой равно отношению оснований, а биссектриса делит противоположную сторону в отношении прилежащих сторон, имеем $(S_1+S_4)/(S_2+S_3)=CD/BD=AC/AB$. Аналогично $(S_2+S_4)/(S_1+S_3)=AE/EC=AB/BC$. Так как $S_1=S_2$, то $(S_1+S_4)/(S_2+S_3)=(S_2+S_4)/(S_1+S_3)$, откуда $AB/BC=AC/AB$. Или $c^2=ab$. По теореме косинусов

$$\cos C=(a^2+b^2-c^2)/(2ab)=(a^2+b^2)/(2ab)-c^2/(2ab)=(a^2+b^2)/(2ab)-1/2\geq 1-1/2=1/2.$$

Получили $\cos C\geq 1/2$. Значит, величина угла C не превосходит 60°. Равенство достигается в правильном треугольнике.

Критерии.

Получено соотношение между сторонами $c^2=ab$, но оценка не сделана или неверна: 2 балла.

Доказано, что угол не больше 60 градусов, но не приведён пример, когда достигается оценка: 6 баллов.

6. В одной компании среди любых 11 человек есть два человека, которые знают друг друга. Доказать, что в этой компании найдется группа из десяти человек такая, что каждый из остальных знает кого-нибудь из этой группы.

<u>Решение.</u> Рассмотрим наибольшую группу G попарно незнакомых между собой людей. В ней не более десяти человек, иначе среди них есть одиннадцать человек, среди которых нет двух знакомых, что противоречит условию. Так как это максимальная группа, то любой из остальных знаком с кем-то из этой группы. В случае необходимости добавим в неё несколько человек, чтобы в ней стало десять человек, и получим группу из десяти человек, так что остальные знакомы с кем-нибудь из этой группы.

Критерии. Рассмотрение частного случая: 0 баллов.