ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ. 2019–2020 уч. г.
МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП. 11 КЛАСС

Задания, ответы и критерии оценивания

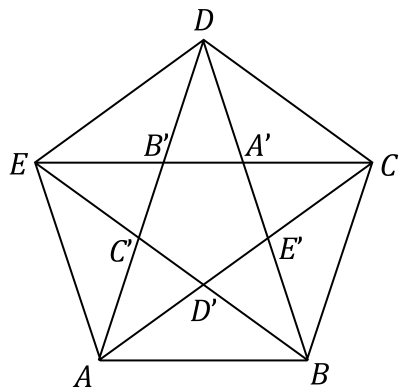
Каждое задание оценивается максимально в 7 баллов

11.1. Углы α и β таковы, что $\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta = 2$, а $\mathrm{ctg}\alpha + \mathrm{ctg}\beta = 5$. Найдите величину $\mathrm{tg}(\alpha+\beta)$.
Ответ: 10/3.
Решение: Преобразуем условие $\mathrm{ctg}\alpha + \mathrm{ctg}\beta = 5$: $\frac{1}{\mathrm{tg}\alpha} + \frac{1}{\mathrm{tg}\beta} = 5$, иначе $\frac{\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\beta}{\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{tg}\beta} = 5$, или $\frac{2}{\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{tg}\beta} = 5$, откуда $\mathrm{tg}\alpha \cdot \mathrm{tg}\beta = \frac{2}{5}$. Окончательно, $\mathrm{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\beta}{1-\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{tg}\beta} = \frac{2}{1-\frac{2}{5}} = \frac{2\cdot 5}{5-2} = \frac{10}{3}$.

Критерии: Только ответ – 0 баллов. Найдено $\mathrm{tg}\alpha \cdot \mathrm{tg}\beta = \frac{2}{5}$ без дальнейших содержательных продвижений (далее решения нет или с ошибкой) – 3 балла. 7 баллов ставить за полное верное решение.

11.2. Является ли простым число $4^{2019} + 6^{2020} + 3^{4040}$?
Ответ: нет.
Решение. Преобразуем выражение: $4^{2019} + 6^{2020} + 3^{4040} = (2^2)^{2019} + 2^{2020}\cdot 3^{2020} + 3^{2\cdot 2020} = (2^{2019})^2 + 2\cdot 2^{2019}\cdot 3^{2020} + (3^{2020})^2 = (2^{2019} + 3^{2020})^2$. Значит, исходное число является квадратом числа $2^{2019} + 3^{2020}$, т.е. не является простым.
Замечание: Заметим, число $2^{2019} + 3^{2020}$ не простое. Его наименьший простой делитель – 2699, а значит, и делитель исходного числа.
Критерии: Только ответ – 0 баллов. Идея преобразовать выражение заменой 4 на 2^2, 6 на $2\cdot 3$, 4040 на $2\cdot 2020$, но решение не доведено до конца или с ошибкой – 3 балла. 7 баллов ставить за полное верное решение (в т.ч., возможно, полученное путем исследования остатков от деления).

11.3. Докажите, что в правильном пятиугольнике отношение любой диагонали к параллельной ей стороне равно $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$.
Решение. Из условия следует, что $EDCD'$ и $DCBC'$ – параллелограммы (см. рис.).



Поэтому $EC' = EB - C'B = EB - DC = EB - ED' = D'B$. Треугольники $EC'B'$ и BAC' подобны, как и треугольники $ED'C$ и $BD'A$, поэтому $\frac{AB}{EB'} = \frac{C'B}{EC'} = \frac{ED'}{D'B} = \frac{EC}{AB} = \frac{EB'+B'C}{AB} = \frac{EB'}{AB} + 1$. Обозначив $x = \frac{EB'}{AB}$, получаем уравнение $\frac{1}{x} = x + 1$, откуда $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Значит, $\frac{EC}{AB} = 1 + \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$.
Аналогично получаем, что остальные отношения равны тому же числу.
Критерии. Рассматривается идея подобия треугольников и есть некоторые продвижения – 3 – 5 баллов. Полное верное решение – 7 баллов.

11.4. Найдите все пары (m, n) такие, что любая пара (x, y), удовлетворяющая уравнению $\frac{x}{y} = m$, удовлетворяет уравнению $(x+y)^2 = n$.
Ответ: $m = -1$, $n = 0$.
Решение: Пусть пара (m, n) удовлетворяет условию задачи.
Пары (x, y) равные $(m, 1)$ и $(2m, 2)$ удовлетворяют первому уравнению. Следовательно,

$$(m+1)^2 = (2m+2)^2 = n \;\Leftrightarrow\; (m+1)^2 = 4(m+1)^2 = n \;\Leftrightarrow\; m = -1, n = 0,$$

так как $n = 4n \Leftrightarrow n = 0$.

Итак, условие задачи столь сильно, что только $m = -1$, $n = 0$ могут подойти. Но при $m = -1$ имеем $x = -y$ и $(x+y)^2 = 0 = n$, т.е. условие задачи выполнено.

Критерии: Верный ответ найден подбором или недостаточно обосновано, почему других пар нет – 3 балла. 7 баллов ставить за полное решение.

11.5. Квадратный участок размером 14 на 14 клеток необходимо замостить прямоугольной плиткой размером 1 × 4. Плитки можно укладывать только вдоль сетки (не по диагонали), ломать плитки нельзя. Какое наибольшее количество плиток потребуется? Останется ли при этом не замощённый участок?

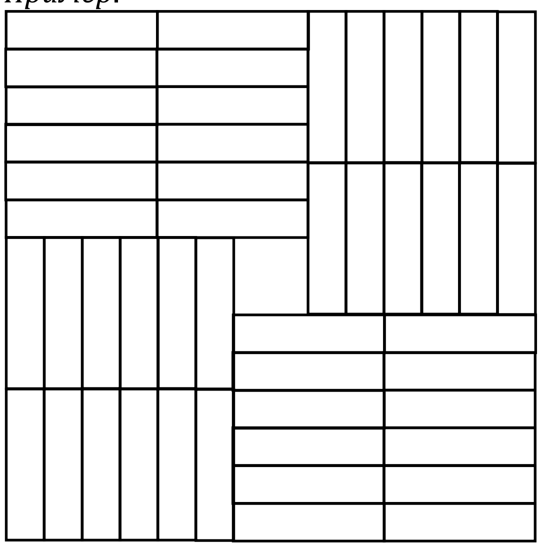
Решение:

Оценка. Всего клеток на участке 14×14 = 196. Разделим на количество клеток одной плитки – 196:4 = 49. Значит, количество плиток, которые можно вырезать на участке 14×14, не более 49.

Раскрасим клетки участка в 4 цвета, как показано на рисунке. Очевидно, каждый прямоугольник размера 1×4 будет содержать по одной клетке каждого цвета из четырех. Клеток цвета 1 – 49, 2 – 50, 3 – 49, а цвета 4 всего 48. Значит, плиток можно выложить не более 48, причем 4 клетки останутся не вымощенными.

2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3
1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2
4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1
3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3
1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2
4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1
3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3
1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2
4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1
3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3
1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2

Пример.



Критерии: Только ответ – 0 баллов. Только оценка – 5 баллов. Только пример – 2 балла. 7 баллов ставить при наличии и оценки, и примера.