Муниципальный этап всероссийской олимпиады школьников по математике

11 класс

11.1. На окружности расставлены четыре числа, сумма которых равна нулю. Для каждой пары соседних чисел нашли их произведение и полученные четыре числа просуммировали. Может ли полученная сумма быть положительной?

Ответ: нет, не может.

Решение 1. Пусть a, b, c, d – записанные числа. $a+b+c+d=0$. Тогда $ab+bc+$ $+cd+da = ab+bc+c(-a-b-c)+a(-a-b-c) = ab+bc-ac-bc-c^2-$ $-a^2-ab-ac = -(a+c)^2 \le 0$.

Решение 2. Пусть a, b, c, d – записанные числа. $a+b+c+d=0$. Тогда $ab+bc+$ $+cd+da = a(b+d)+c(d+b)=(a+c)(d+b) = -(a+c)^2 \le 0$.

Критерии.

7 баллов. Полное обоснованное решение.

2 балла. Во втором решении приведено разложение на множители.

11.2. Про углы треугольника ABC известно, что $\sin\angle A+\cos\angle B=\sqrt{2}$ и $\cos\angle A+\sin\angle B=\sqrt{2}$. Найдите величину угла C.

Ответ: 90°.

Решение. Возведем оба равенства в квадрат и сложим. Затем воспользуемся основным тригонометрическим тождеством, и после преобразований получим $2\sin\angle A\cos\angle B+2\sin\angle B\cos\angle A=2\sin(\angle A+\angle B)=2$, то есть $\sin(\angle A+\angle B)=1$. Следовательно, $\angle A+\angle B=90°$, $\angle C=180^0-(\angle A+\angle B)=90°$.

11.3. Найти все натуральные числа n такие, что значение выражения $\sqrt{n\sqrt{n\sqrt{n}}}$ является натуральным числом, меньшим 2219.

Ответ: $n=1, n=2^8$ и $n=3^8$.

Решение. Преобразуем выражение $\sqrt{n\sqrt{n\sqrt{n}}}=\left(n\left(n(n)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(n\left(n^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}=$ $=\left(n(n)^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(n^{\frac{7}{4}}\right)^{\frac{1}{2}}=n^{\frac{7}{8}}$. Значит, число должно быть восьмой степенью какого-то натурального числа. При $n=4^8=2^{16}$, проверка даёт, что

$$\sqrt{2^{16}\sqrt{2^{16}\sqrt{2^{16}}}}=\sqrt{2^{16}\sqrt{2^{24}}}=\sqrt{2^{28}}=2^{14}=4096>2219.$$

Число $n = 1$, очевидно, является решением. Осталось проверить только $n = 2^8$ и $n = 3^8$.

$$\sqrt{3^8\sqrt{3^8\sqrt{3^8}}} = \sqrt{3^8\sqrt{3^{12}}} = \sqrt{3^{14}} = 3^7 = 2187 < 2219.$$

$$\sqrt{2^8\sqrt{2^8\sqrt{2^8}}} = \sqrt{2^8\sqrt{2^{12}}} = \sqrt{2^{14}} = 2^7 = 128 < 2219.$$

Критерии.

7 баллов. Полное обоснованное решение.

3 балла. Дан верный ответ и сделана проверка для обоих случаев, но не доказано, что других ответов нет.

3 балла. Приведена только верная оценка, то есть доказано, что $n = 4^8$ и больше не удовлетворяют условию.

1 балл. Только верный ответ.

0 баллов. Неверное решение.

11.4. Расставьте в клетки таблицы 8×8 целые числа так, чтобы сумма чисел во всей таблице была положительной, а сумма чисел в любом квадрате 3×3 была отрицательной.

Ответ: Например,

1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	-9	1	1	-9	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	-9	1	1	-9	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

.

Критерий.

7 баллов. Любой верный пример.

Комментарий. Существует несколько различных правильных примеров.

11.5. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведены две диагонали боковых граней A_1C_1 и C_1D. Найдите угол между ними, если известно, что диагональ A_1C_1 равна по длине одному из рёбер параллелепипеда, а диагональ C_1D составляет с этим же ребром угол 30 градусов.

Ответ: $arccos\frac{\sqrt{3}}{6}$.

Решение. Ясно, что диагональ A_1C_1 может быть равна только рёбрам $AA_1 = BB_1 = CC_1 = DD_1$, т.к. в противном случае катет прямоугольного треугольника $A_1D_1C_1$ был бы равен его гипотенузе. Положим $D_1C_1 = a$. Тогда в треугольнике DD_1C_1 по условию $\angle D_1DC_1 = 30^0$, и $DC_1 = 2a$. Значит $C_1A_1 = DD_1 = a\sqrt{3}$. Поэтому $A_1D_1 = a\sqrt{2}$ (из прямоугольного треугольника $A_1D_1C_1$) и $A_1D = a\sqrt{5}$ (из прямоугольного треугольника A_1D_1D). Теперь находим косинус угла A_1C_1D по теореме косинусов.

Критерии.

7 баллов. Полное обоснованное решение.

Минус 2 балла. Не обоснован выбор бокового ребра параллелепипеда.

Минус 1 балл. За одну ошибку в вычислениях, не влияющую на логику решения.

0 баллов. В остальных случаях.