**Всероссийская олимпиада школьников 2019/2020 уч. г.**
**Муниципальный этап**
**Математика**
**11 класс**

Общее время выполнения работы – 4 часа 00 мин.
***Максимальная сумма баллов 35.***

Во время Олимпиады участники не имеют права общаться друг с другом, свободно перемещаться по аудитории; не вправе пользоваться справочными материалами, средствами связи и электронно-вычислительной техникой. При установлении факта нарушения участником Олимпиады Порядка или использования во время тура запрещенных источников информации решением Оргкомитета такой участник лишается возможности дальнейшего участия в Олимпиаде.

**Общие критерии оценки:**
7 баллов ставится за полностью решенную задачу.
6-7 баллов ставится, если решение верное, но имеются небольшие недочеты.
5-6 баллов ставится, если решение в целом верное, но имеются существенные ошибки, не влияющие на логику рассуждений.
4 балла ставится, если верно рассмотрен один из двух (более сложный) случай, или в задаче типа «оценка + пример» верно получена оценка.
2-3 балла ставится, если получены вспомогательные утверждения, помогающие при решении задачи.
1 балл ставится, если рассмотрены отдельные случаи при отсутствии решения.
0 баллов, ставится, если нет продвижений в решении, <u>даже если при этом дан верный ответ</u>.
Решение школьника не обязано совпадать с предложенными, тогда оно оценивается также в соответствии указанной выше схемой оценок.

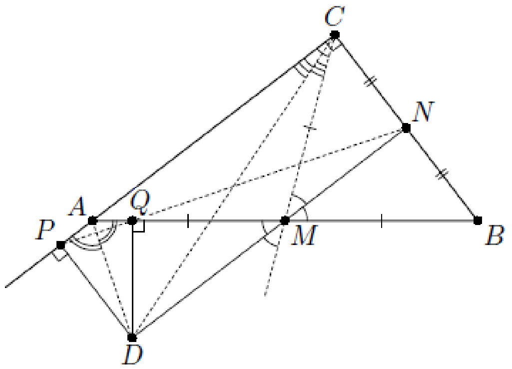
**Задание 11.1**
$P(x)$ и $Q(x)$ – приведённые квадратные трёхчлены, имеющие по два различных корня. Оказалось, что сумма двух чисел, получаемых при подстановке корней трёхчлена $P(x)$ в трёхчлен $Q(x)$, равна сумме двух чисел, получаемых при подстановке корней трёхчлена $Q(x)$ в трёхчлен $P(x)$. Докажите, что дискриминанты трёхчленов $P(x)$ и $Q(x)$ равны.
**Количество баллов 7**
**Решение**
Пусть $a_1$ и $a_2$ – корни трёхчлена $P(x)$, а $b_1$ и $b_2$ – корни трёхчлена $Q(x)$.
**Первый способ**. $P(x) = (x – a_1)(x – a_2)$, $Q(x) = (x – b_1)(x – b_2)$.
Поэтому $(b_1 – a_1)(b_1 – a_2) + (b_2 – a_1)(b_2 – a_2) = (a_1 – b_1)(a_1 – b_2) + (a_2 – b_1)(a_2 – b_2)$.
Перенося все слагаемые в одну часть, получаем
$(b_1 – a_1)(b_1 – a_2 + a_1 – b_2) + (b_2 – a_2)(b_2 – a_1 + a_2 – b_1) = 0$,
то есть $(b_1 – b_2)^2 – (a_1 – a_2)^2 = (b_1 + a_2 – a_1 – b_2)\,(a_1 + b_1 – a_2 – b_2) = 0$.
Но $(b_1 – b_2)^2$ и $(a_1 – a_2)^2$ как раз и есть дискриминанты данных трёхчленов.
**Второй способ**. Пусть $P(x) = x^2 + px + r$, $Q(x) = x^2 + qx + s$.
Тогда $P(b_1)+P(b_2)=(b_1^2+b_2^2)+p(b_1+b_2)+2r=q^2-2s+pq+2r$.
Аналогично $Q(a_1) + Q(a_2) = p^2 – 2r + pq + 2s$.
По условию $p^2 – 2r + pq + 2s = q^2 – 2s + pq + 2r$, откуда $p^2 – 4r = q^2 – 4s$.

**Задание 11.2**
Пусть S(n) сумма цифр числа n. Найдите все n, для которых
n + S(n) + S(S(n)) + … S(S(…S(n)…) = 2000000 (здесь в сумме *n* слагаемых, а в каждом слагаемом на одну итерацию функции S больше, чем в предыдущем слагаемом).

**Количество баллов 7**
**Ответ**:
таких n не существует
**Решение**
Доказательство. Все n слагаемых в левой части дают одинаковый остаток при делении на 3, совпадающий с остатком от деления на 3 самого числа n. Перебирая три различных случая, получаем, что остаток от деления левой части на 3 равен либо 0, либо 1. Но правая часть число 2000000 при делении на 3 дает в остатке 2.

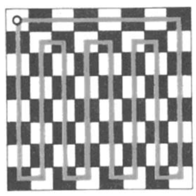
**Задание 11.3**
Доказать, что для любого натурального числа *n* выполнено неравенство:
$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}>2\sqrt{n}-\frac{3}{2}$$
**Количество баллов 7**
**Решение**
Докажем методом математической индукции неравенство
$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}\geq 2\sqrt{n}-\frac{3}{2}+\frac{1}{2\sqrt{n}} \qquad (*)$$
1) при n = 1 верно
2) пусть верно при n = k:
$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{k}}\geq 2\sqrt{k}-\frac{3}{2}+\frac{1}{2\sqrt{k}}$$
3) отсюда следует, что:
$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}\geq 2\sqrt{k}-\frac{3}{2}+\frac{1}{2\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}$$
Рассмотрим разность:
$$\left(2\sqrt{k}-\frac{3}{2}+\frac{1}{2\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)-\left(2\sqrt{k+1}-\frac{3}{2}+\frac{1}{2\sqrt{k+1}}\right)=2\sqrt{k}-2\sqrt{k+1}+\frac{1}{2\sqrt{k}}+\frac{1}{2\sqrt{k+1}}=$$
$$=-\frac{2}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}+\frac{1}{2\sqrt{k}}+\frac{1}{2\sqrt{k+1}}=\frac{(\sqrt{k}-\sqrt{k+1})^2}{2(\sqrt{k}+\sqrt{k+1})\sqrt{k}\sqrt{k+1}}\geq 0$$
Поэтому
$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}\geq 2\sqrt{k+1}-\frac{3}{2}+\frac{1}{2\sqrt{k+1}}$$
Неравенство (*) доказано, а отсюда следует верность утверждения задания.

**Задание 11.4**
Пусть $M$ и $N$ – середины гипотенузы $AB$ и катета $BC$ прямоугольного треугольника $ABC$ соответственно. Вневписанная окружность треугольника $ACM$ касается стороны $AM$ в точке $Q$, а прямой $AC$ – в точке $P$. Докажите, что точки $P$, $Q$ и $N$ лежат на одной прямой.
**Количество баллов 7**
**Решение**
Пусть $D$ – центр вневписанной окружности треугольника $ACM$, тогда $P$ и $Q$ – проекции точки $D$ на прямые $AC$ и $AB$ соответственно (см. рис.).




Так как $MN$ – медиана равнобедренного треугольника $BMC$, проведённая к основанию, то $MN$ – биссектриса угла $BMC$, поэтому точка $D$ лежит на прямой $MN$.
Кроме того, $MN$ – средняя линия треугольника $ABC$, значит, $MN \parallel AC$.
Таким образом, $PCND$ – прямоугольник.
Пусть $\angle AMD = \angle CMN = \angle ACM = \alpha$, тогда $\angle PAD = ½\,(180° - \alpha)$,
а $\angle APN = \angle PCD = {}^{\alpha}/_{2}$ ($CD$ – биссектриса угла $ACM$).
Следовательно, $\angle PAD + \angle APN = 90°$, поэтому $AD \perp PN$.
Поскольку точка $Q$ симметрична точке $P$ относительно прямой $AD$, то $Q$ лежит на $PN$, что и требовалось доказать.

**Задание 11.5**
Король обошёл шахматную доску, побывав на каждом поле ровно один раз и вернувшись последним ходом на исходное поле. (Король ходит по обычным правилам: за один ход он может перейти по горизонтали, вертикали или диагонали на любое соседнее поле.) Когда нарисовали его путь, последовательно соединив центры полей, которые он проходил, получилась замкнутая ломаная без самопересечений. Какую наименьшую и какую наибольшую длину может она иметь? (Сторона клетки равна единице.)
**Количество баллов 7**
**Ответ:**
наименьшая длина равна 64, наибольшая равна $28 + 36\sqrt{2}$.
**Решение**
Король сделал 64 хода. Поскольку длина каждого хода равна либо единице (*прямой* ход), либо $\sqrt{2}$ (*диагональный* ход), то длина всего пути заведомо не меньше 64. Путь длины 64 изображён на рисунке.



Покажем, что длина пути короля не может быть больше $28 + 36\sqrt{2}$.
Рассмотрим два соседних выхода $A$ и $B$ короля на границу доски. Если эти граничные поля не соседние, то участок пути короля между ними разбивает доску на две части, в каждой из которых есть целые клетки. Но тогда король не сможет пройти из одной части в другую, что противоречит условию. Значит, поля $A$ и $B$ – соседние и, следовательно, разного цвета. Так как при диагональных ходах цвет поля не меняется, то между каждыми двумя соседними выходами на границу должен быть прямой ход. Поскольку граничных полей 28, то и выходов на границу – тоже 28, и, следовательно, прямолинейных ходов не меньше 28.
Следующий рисунок показывает, что можно обойтись ровно 28 "прямыми" ходами.