Муниципальный этап всероссийской олимпиады школьников по математике 2019-2020 учебный год

Решения

11 класс

1. *Ответ: не существуют*.
   Решение. Пусть такие натуральные a и b существуют. Так как НОК(a, b) делится на b и b^3 делится на b, то a делится на b. Но тогда НОК(a, b) = a, получаем $a + b^3 = a$, откуда $b^3 = 0$, $b = 0$. Противоречие.
2. *Решение*. Заметим, что уравнения $ax + \frac{c}{x} = b$ и $ax^2 - bx + c = 0$ имеют одни и те же корни (так как c не равно 0, то у второго уравнения нет корня 0). Тогда $b^2 - 4ac \geq 0$.
   Пусть уравнения $ax + \frac{c}{x} = b + 1$ и $ax + \frac{c}{x} = b - 1$ не имеют корней, тогда и уравнения $ax^2 - (b + 1)x + c = 0$ и $ax^2 - (b - 1)x + c = 0$ не имеют корней (так как c не равно 0, у них тоже не может быть корня 0). Тогда $(b + 1)^2 - 4ac < 0$ и $(b - 1)^2 - 4ac < 0$, сложив эти неравенства и преобразовав получаем $b^2 - 4ac < -1$, противоречие.
3. *Решение*. Покажем, что треугольники LBK и KCD равны, откуда будет следовать, что $BL = KC$. $\angle CKD = \angle KDA$, как накрест лежащие, $\angle KDA + \angle ALK = 180°$, так как K, D, A, L лежат на одной окружности, $\angle BLK + \angle ALK = 180°$, как смежные. Отсюда получаем, что $\angle BLK = \angle CKD$.

   $\angle LBK = \angle KCD$, так как трапеция равнобедренная.
   Две пары углов в треугольниках равны, значит равны и оставшиеся углы.
   $\angle BAK = \angle KAD = \angle BKA$, треугольник ABK — равнобедренный, $AB = BK$, так как трапеция равнобедренная, то $BK = CD$.

   Треугольники LBK и KCD равны по стороне и двум прилежащим к ней углам.
4. *Решение*. Найдем, на сколько частей разобьют круг треугольники. Всего будет нарисовано 15 хорд. Будем их проводить по одной. Каждая проведенная хорда увеличивает количество частей на 1 (так как хорды не пересекаются, то каждая новая хорда делит одну из уже имеющихся частей на две). Значит, всего частей будет 16. Пять из них — это сами треугольники, тогда все незадействованные отмеченные точки, которых 40 - 15 = 25 находятся в 11 частях, тогда в одной из частей находится по крайней мере 3 точки (иначе в каждой части было бы не более двух точек, и всего точек было бы не больше 22). Эти три точки и является вершинами искомого треугольника, который будет полностью находится в одной части круга, и, соответственно, не пересекаться с другими треугольниками.
5. *Решение*. Найдем несколько первых членов последовательности: 1, 1, 3, 11, 41, 153, 571, …
   А теперь заметим другую закономерность между числами, а именно, что $a_n = 4a_{n-1} - a_{n-2}$.
   Докажем ее по индукции. База уже есть.
   Предположим, что $a_n = 4a_{n-1} - a_{n-2}$ выполняется для всех $n \leq k$, докажем, что равенство выполняется и для $n = k+1$.
   Т. е. надо показать, что $\frac{a_k^2+2}{a_{k-1}} = 4a_k - a_{k-1}$ или $a_k^2 + 2 = 4a_k a_{k-1} - a_{k-1}^2$. Так как по предположению индукции $a_k = 4a_{k-1} - a_{k-2}$, надо показать, что $(4a_{k-1} - a_{k-2})^2 + 2 = 4(4a_{k-1} - a_{k-2})a_{k-1} - a_{k-1}^2$ или $a_{k-1}^2 + 2 = 4a_{k-1}a_{k-2} - a_{k-2}^2$. Последнее равенство следует

из $a_k = \frac{k-1}{a_{k-2}} = 4a_{k-1} - a_{k-2}$, что верно по предположению индукции.