Ответы муниципального этапа ВсОШ по математике
11 класс

11.1. Два рыбака поймали пять карпов. Один из них весит 1 кг, а другой – 2 кг. Сколько могли весить три другие рыбы, чтобы какие бы две из пяти пойманных не забрал первый рыбак, второй смог бы разделить оставшиеся рыбы так, чтобы улов (в килограммах) распределился поровну (резать карпов нельзя).

Ответ. 1, 1 и 1 кг; 1, 2 и 2 кг; 3, 3 и 3 кг.

Решение. Расположим карпов в порядке неубывания их массы: $a \le b \le c \le d \le e$.

Пусть первый рыбак заберет карпов с массами d и e. Их общая масса не меньше массы любых двух оставшихся рыб, поэтому второй рыбак должен забрать себе все остальные рыбы, то есть $e + d = a + b + c$.

Пусть первый рыбак заберет карпов с массами c и e. По аналогичной причине $e + c = a + b + d$. Отсюда следует, что $c = d$ и $e = a + b$. Таким образом, имеются карпы с массами $a, b, c, c, e = a + b$.

Пусть первый рыбак заберет карпов с массами a и e. Если ему еще добавить карпа массы c, то масса его рыб станет больше, чем у оставшихся двух карпов. Поэтому возможны только два случая.
1) $e + a + b = 2c$. Отсюда $c = e = a + b$, и массы карпов равны $a, b, a + b, a + b, a + b$. По условию возможны варианты: 1, 1, 2, 2, 2 и 1, 2, 3, 3, 3 (кг). Оба подходят.
2) $e + a = b + 2c$. Отсюда $c = a$, и массы карпов равны $a, a, a, a, a + b$. Значит, $a = b = 1$, то есть в наборе – карпы массой 1, 1, 1, 1, 2 (кг). Этот случай тоже подходит.

11.2. Докажите, что $x^2 + y^2 < z^2$, если $x^2 + y^2 + xy + yz + zx < 0$.

Доказательство. Умножим обе части неравенства $x^2 + y^2 + xy + yz + zx < 0$ на 2 и выполним преобразования: $2x^2 + 2y^2 + 2(xy + yz + zx) = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx) + x^2 + y^2 - -z^2$ $=(x + y + z)^2 + x^2 + y^2 -z^2 < 0$. Тогда $x^2 + y^2 -z^2 < -(x + y + z)^2 \le 0$. Следовательно, $x^2 + y^2 -z^2 < 0$ и $x^2 + y^2 < z^2$.

11.3. Найдите корни уравнения: $(x^3 - 2)(2^{\sin x} - 1) + (2^{x^3} - 4) \sin x = 0$.

Ответ. $\sqrt[3]{2}$, πn ($n \in \mathbf{Z}$).

Решение. Из того, что функция $y = 2^t$ возрастает, следует:

1) если $\sin x > 0$, то $2^{\sin x} - 1 > 0$; если $\sin x < 0$, то $2^{\sin x} - 1 < 0$;

2) если $x^3 - 2 > 0$, то $2^{x^3} - 4 > 0$; если $x^3 - 2 < 0$, то $2^{x^3} - 4 < 0$.

Следовательно, если $(x^3 - 2)(2^{\sin x} - 1) > 0$, то $(2^{x^3} - 4)\cdot\sin x > 0$; если $(x^3 - 2)(2^{\sin x} - 1) < 0$, то $(2^{x^3} - 4)\cdot\sin x < 0$; то есть знаки выражений $(x^3 - 2)(2^{\sin x} - 1)$ и $(2^{x^3} - 4)\cdot\sin x$ совпадают.

Поэтому, каждое слагаемое в левой части уравнения должно обращаться в нуль, то есть $x^3 = 2$ или $\sin x = 0$.

11.4. Четырёхугольник $MNPQ$ вписан в окружность и внутри него существует точка S, расстояния от которой до прямых, проходящих через стороны данного четырехугольника, пропорциональны соответствующим сторонам. Доказать, что S – точка пересечения диагоналей $MNPQ$.

Решение.

Первый способ. Множество точек, расстояния от которых до прямых MN и PQ пропорциональны соответствующим сторонам, – это прямая, проходящая через точку пересечения MN и PQ. Так как четырёхугольник $MNPQ$ – вписанный, треугольники LMN и LPQ, где L – точка пересечения диагоналей, подобны, то есть L лежит на указанной прямой. Аналогично L лежит на второй такой же прямой и, значит, совпадает с S.

Второй способ. 1 случай. Если касательные к окружности $MNPQ$ в точках M и P пересекаются.

Пусть U – точка пересечения касательных к окружности $MNPQ$ в точках M и P, X, Y – проекции U на MN и NP. $UM = UP$. Угол между касательной UM и хордой MN измеряется половиной дуги, заключенной внутри него, т.е. вписанным $\angle NPM$ (аналогично, для касательной UP и хордой PN).

Тогда

$UX : UY = \sin\angle UMX : \sin\angle UPY = \sin\angle NPM : \sin\angle NMP = MN : NP,$

то есть S лежит на прямой UN. Аналогично S лежит на прямой UQ, и, если эти прямые не совпадают, то совпадают точки S и U. Точно так же доказывается, что, если не совпадают прямые MV и PV, где V – точка пересечения касательных в точках N и Q, то совпадают точки S и V, что невозможно.

Будем считать, что на одной прямой лежат точки N, Q, U. Тогда

$MN : MQ = MU : UQ = PU : UQ = NP : PQ,$

и точки M, P, V также лежат на одной прямой. Следовательно, S – точка пересечения MP и NQ.

2 случай. Если касательные к окружности $MNPQ$ в точках M и P параллельны.

В этом случае точки M и P диаметрально противоположны. Если точки N и Q также диаметрально противоположны и $MNPQ$ квадрат, а точка S является центром окружности, описанной около квадрата, а, следовательно, S – точка пересечения диагоналей $MNPQ$.

Если точки N и Q не диаметрально противоположны, то для них выполняем рассуждения из случая 1. Треугольники MSN и QSP будут подобны и S – точка пересечения диагоналей $MNPQ$.

11.5. В 50 корзинах лежат огурцы, баклажаны и помидоры. Докажите, что можно так выбрать 26 корзин, что в них окажется не менее половины всех огурцов (поштучно), не менее половины всех баклажанов и не менее половины всех помидоров (также, поштучно).

Решение.

Лемма. Любые $2n$ пар положительных чисел (a_i, b_i) можно так разбить на две группы по n пар в каждой, что сумма a_i в первой группе отличается от суммы a_i во второй группе не более, чем на максимальное a_i, и сумма b_i в первой группе отличается от суммы b_i во второй группе не более, чем на максимальное b_i.

Доказательство леммы. Упорядочим пары по убыванию a_i. Назовём пары с номерами $2i-1$ и $2i$ двойкой. Заметим, что если разбить пары на две группы так, что пары каждой двойки попадут в разные группы, то разность сумм a_i в группах $(a_1-a_2)+(a_3-a_4)+\ldots+(a_{2n-1}-a_{2n})\le a_1$.

Распределим пары по группам с соблюдением указанного условия. Пусть еще не получилось требуемого разбиения, причём в первой группе сумма b_i больше, чем во второй. Тогда в какой-то из двоек b_i, попавшее в первую группу, больше b_j, попавшего во вторую. Поменяв пары, принадлежащие этой двойке, местами, мы получим, что разность сумм b_i уменьшилась по модулю, поскольку изменилась не более, чем на $2b_1$. Такой процесс не может продолжаться бесконечно, поэтому когда-нибудь распределение станет требуемым. Лемма доказана.

Выберем из наших корзин ту, что содержит наибольшее количество баклажанов, а затем из оставшихся – ту, что содержит наибольшее количество огурцов. Оставшиеся корзины согласно лемме можно разбить на две группы по 24 корзины так, что разность количества баклажанов в первой и второй группах не превосходит числа баклажанов в первой корзине, и разность числа огурцов в первой и второй группах не превосходит числа огурцов во второй корзине. Добавим эти две корзины в ту группу, где не меньше помидоров. Полученный набор из 26 корзин удовлетворяет условиям задачи.