11 класс

11.1. Даны два пятизначных числа без цифр 0 и 1 в своей записи. Модуль их разности – четырехзначное число *S*. Известно, что если у одного из исходных чисел каждую цифру уменьшить на 1, то модуль разности станет равным 10002. Какие значения может принимать число *S*?

Ответ.1109.

Решение. Пусть A и B – два данных числа, а C – число, полученное из B уменьшением каждой его цифры на 1, то есть $C = B - 11111$. Если $A < C$, то, тем более, $A < B$, поэтому и модули разности – это числа $B - A$ и $C - A$. Однако, по условию, $C - A = 10002 > 10000 > B - A$ (это число – четырехзначное), то есть $C > B$. Противоречие. Значит, $A > C$. Также невозможен случай $A > B$ (тогда $A - C = A - (B - 11111) = (A - B) + 11111 > 10002 = A - C$). Итак, возможен только случай: $C < A < B$. И тогда $A - C = A - (B - 11111) = 10002$, то есть $A - B = -1109$. Отсюда $S = |A - B| = B - A = 1109$.

Комментарий. Верный ответ без обоснований – 0 баллов.
Верный ответ получен рассмотрением примера –1 балл.
Установлен порядок чисел *A*, *B*, *C* (в обозначениях решения) – 3 балла.
Получено постороннее решение – не более 4 баллов за задачу.

Замечание. Приводить примеры подходящих чисел *A*, *B* не требуется, так как доказано, что возможен лишь один вариант ответа, а из условия следует, что подходящая пара существует. Баллы за отсутствие такого примера не снимаются.

11.2 Разность возрастающей арифметической прогрессии, состоящей из натуральных чисел, является натуральным числом, оканчивающимся на 2019. Могут ли три последовательных члена этой прогрессии быть квадратами натуральных чисел?

Ответ. Не могут.

Решение. Предположим, что три подряд идущих члена прогрессии являются точными квадратами. Обозначим их $a^2 < b^2 < c^2$. Пусть разность прогрессии равна $d = 2k + 1$. Тогда $c^2 - a^2 = 2d = 4k + 2$. Но $c^2 - a^2 = (c - a)(c + a)$, и оба сомножителя имеют одинаковую четность (отличаются на 2*a*). Значит либо $c^2 - a^2$ – нечетно, либо делится на 4. Противоречие.

Комментарий. Верный ответ без обоснований – 0 баллов.
Получено равенство вида $c^2 - a^2 = 4k + 2$ – 3 балла.

11.3. На деревянной стене отметили вершины треугольника *ACE*. Перпендикулярно стене вбили гвозди так, что наружу торчат части гвоздей длин: *AB*=1, *CD*=2, *EF*=4 (*B*, *D*, *F* – шляпки гвоздей). Могли ли расстояния между шляпками гвоздей оказаться равными *BD*=$\sqrt{2}$, *DF* = $\sqrt{5}$, *FB* = $\sqrt{13}$?

Ответ. Не могли.

Решение. Предположим, что расстояния между шляпками такие, какие приведены в условии. Из прямоугольной трапеции *ABDC* вычислим длину боковой стороны *AC*: $AC^2 = BD^2 - (CD - AB)^2 = 2 - 1 = 1$, т.е. *AC* = 1. Аналогично найдем *CE* и *EA*: $CE = \sqrt{5-(4-2)^2} = 1$, $EA = \sqrt{13-(4-1)^2} = 2$. Таким образом, *AE* = *AC* + *CE*, откуда следует, что точка *C* лежит на отрезке *AE* (и является его серединой). Последнее означает, что точки *A*, *C* и *E* не могли быть вершинами треугольника. Противоречие.

Комментарий. Верный ответ без обоснований – 0 баллов.
Вычислены длины отрезков *AC*, *CE* и *EA* – 4 балла.

11.4. Известно, что $x + 0,5 > y^2 + z^2$. Докажите, что $x + y + z > -1$.

Решение. Добавим к обеим частям данного неравенства $y + z$. Получим: $x + y + z + 0,5 > y^2 + y + z^2 + z = (y+0,5)^2 + (z+0,5)^2 - 0,5$. Поэтому $x + y + z > (y+0,5)^2 + (z+0,5)^2 - 1 \geq -1$, что и требовалось.

11.5. В каждой из 320 коробок лежит либо 6, либо 11, либо 15 шариков, причем все три типа коробок присутствуют. Верно ли, что можно выбрать несколько коробок, в которых суммарно ровно 1001 шарик?

Ответ. Верно.

Решение. Заметим, что $6 \cdot 11 \cdot 15 = 990$. Выберем одну коробку с 11 шариками. Покажем, что из оставшихся 319 коробок мы можем выбрать несколько, в которых суммарно ровно 990 шариков. Покажем, что эти 990 шариков можно получить, выбрав коробки одного типа. Действительно, если бы это не получилось сделать, коробок с 6 шариками было бы меньше $990 : 6 = 165$, то есть не больше 164. Аналогично, коробок с 11 шариками – не больше $990 : 11 - 1 = 89$, а коробок с 15 шариками – не больше $990 : 15 - 1 = 65$. То есть коробок было бы не больше, чем $164 + 89 + 65 = 318$, а у нас их 319.

Комментарий. Верный ответ без обоснований – 0 баллов.
Задача сведена к выбору из 319 коробок нескольких, в которых суммарно ровно 990 шариков – 2 балла.