Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике в 2019 – 2020 учебном году

11 класс

Время выполнения заданий — 4 часа

11.1. *В каждую клетку квадрата* 2×2 *вставлено по числу. Все числа попарно различны, сумма чисел в первой строке равна сумме чисел во второй строке, а произведение чисел в первом столбце равно произведению чисел во втором столбце. Докажите, что сумма всех четырёх чисел равна нулю.*

Решение:

Способ 1. Пусть в верхней строке таблицы стоят числа a и b, во второй — c и d; числа a и c стоят в одном столбце. Тогда условие задачи равносильно системе

$$\begin{cases} a+b &= c+d, \\ ac &= bd. \end{cases}$$

Выразим из первого уравнения одну из переменных, например, c и подставим во второе: $a(a+b-d) = bd$. Отсюда $a^2+ab = bd+ad$, $a(a+b) = d(a+b)$. Так как a и d различны, отсюда следует, что $a+b = 0$. Тогда $c+d = a+b = 0$ и сумма всех чисел таблицы равна 0. Утверждение задачи доказано.

Способ 2. Пусть сумма чисел в каждой из строк равна S. Тогда в первой строке записаны числа $S-t$ и $S+t$, во второй — числа $S-p$ и $S+p$. Числа t и p различны и, без ограничения общности, оба положительны. Чтобы произведения чисел в столбцах были равны, необходимо, чтобы выполнялось одно из двух равенств: $(S-t)(S+p) = (S+t)(S-p)$ или $(S+t)(S+p) = (S-t)(S-p)$. Путём раскрытия скобок и приведения подобных первое равенство приводится к виду $S(p-t) = S(t-p)$, откуда $S = 0$, поскольку t и p различны. Аналогичные действия со вторым равенством приводят к уравнению $S(p+t) = -S(p+t)$, откуда опять-таки $S = 0$, так как число $p+t$ — положительное. Сумма всех четырёх чисел равна $2S$, что тоже 0. Утверждение задачи доказано.

Примечание: В качестве примера такой таблицы подойдёт любая, в которой числа в каждой из строк противоположны.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Верное доказательство	7 баллов
Не приведён пример таблицы из условия	баллов не снижать
Условие задачи верно записаны в алгебраической форме (через уравнение или систему уравнений)	2 балла
Утверждение проиллюстрировано конкретными примерами таблиц (в любом количестве)	0 баллов

11.2. *В городе Перпендикуляринске решили построить новые дома из нескольких этажей (некоторые из них могут быть и одноэтажными), но так, чтобы суммарное число этажей было равно 30. Архитектор города Параллельников предложил проект, согласно которому, если после постройки залезть на крышу каждого нового дома, сосчитать число более низких новых домов и сложить все такие числа, то полученная сумма будет максимально большой. Чему равна указанная сумма? Сколько при этом домов, и какой этажности предлагается построить?*

Решение: 1) Покажем, что проект не предполагает постройку домов, в которых больше двух этажей. Предположим противное, что такие дома запланированы. Возьмём самый низкий из них и уменьшим его на один этаж, построив за счёт этого дополнительный одноэтажный дом. Сумма чисел, о которой идёт речь в условии, при этом уменьшится на количество новых двухэтажных домов (и то, только в случае, если мы уменьшили трёхэтажный дом) и увеличится на количество новых домов, у которых 2 этажа или больше (за счёт построенного одноэтажного). Следовательно, сумма нового проекта больше. Противоречие. Итак, Параллельников предлагает строить только двух- и одноэтажные дома.

2) Пусть проект предусматривает постройку x одноэтажных домов и y двухэтажных. Тогда $x+2y = 30$, а сумма получится равной произведению xy. Нам, следовательно, требуется максимизировать выражение $y(30 - 2y)$ на отрезке $[0; 15]$. Максимум достигается в вершине параболы, в точке $y = 7{,}5$. Учитывая, что y — целое, получаем, что наибольшее значение достигается при $y = 7$ или при $y = 8$ и равно 112. Соответственно x равен либо 16, либо 14.

Ответ: Сумма равна 112. Проект предполагает постройку либо 14 одноэтажных и 8 двухэтажных домов, либо 16 одноэтажных и 7 двухэтажных.

Рекомендации по проверке:

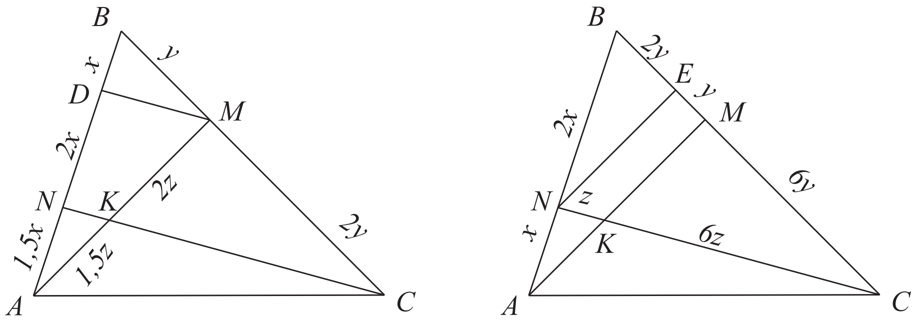
есть в работе	баллы
Верный обоснованный ответ	7 баллов
При верном ходе решения «потерялся» один из двух наборов домов, составляющих ответ и/или сумма определена неверно из-за ошибок в арифметике	6 баллов
Доказано, что проект не предусматривает домов, выше трёх этажей, а дальнейшие рассуждения неверны	4 балла
Верно проанализирован случай, когда все дома одно- или двухэтажные, но не доказано, что максимум достигается именно на таких наборах домов	3 балла
Доказаны некоторые утверждения о свойствах оптимального набора домов, не приведшие к решению (например, что должны быть одноэтажные дома, или что высоты домов идут без пропусков)	не более 2 баллов
Безо всякого обоснования приведены оба возможных набора домов и верно подсчитана требуемая сумма	2 балла
Верно указана требуемая сумма без обоснования, или приведён один из двух примеров, на которых эта сумма достигается	1 балл
Неверный ответ	0 баллов

11.3. *В этот раз пиццу испекли почему-то в форме неправильного треугольника и разрезали на 7 частей тремя прямолинейными разрезами, как указано на рисунке (каждый разрез проводился из вершины в точку, делящую сторону в отношении 1:2).*

Билли, Вилли и Дилли взяли себе по треугольному кусочку с углов (они отмечены более тёмным цветом), а дядюшка Скрудж — треугольный кусочек из серёдки (светло-серый цвет). Докажите, что дядюшка Скрудж съел столько же пиццы, сколько все три его племянника вместе взятые.

Решение: Прежде всего установим, в каком отношении делят друг друга отрезки, соединяющие вершины треугольника с точками, делящими сторону на три части (такие отрезки называются *тридианами*).

Пусть тридианы AM и CN треугольника ABC пересекаются в точке K — см. рисунок. $2BM = MC$, $2AN = NB$. Чтобы понять, в каком отношении точка K делит тридиану AM, проведём прямую $MD \parallel CN$ (точка D лежит на стороне AB — рисунок слева). Пусть $BM = y$, Тогда $MC = 2y$. По теореме Фалеса из треугольника BNC получим, что $BD = x$, $DN = 2x$ для некоторого x. Тогда $BN = 3x$, а $AN = 1{,}5x$. Снова по теореме Фалеса, но для треугольника AMD получим $AK = 1{,}5z$, $KM = 2z$, откуда $AK : KM = 3 : 4$.



К решению задачи 11.3

Аналогично находится в каком отношении точка K делит вторую тридиану — рисунок справа. Получим $CK : KN = 6 : 1$.

Теперь найдём отношение площадей фигур, на которые разрезы разделили пиццу. Первый разрез (пусть это был разрез AM) разделил пиццу на 2 треугольные части. У этих треугольников одна и та же высота, опущенная из точки A, поэтому отношение их площадей равно отношению оснований, то есть равно $BM : MC = 1 : 2$. Итак, треугольник ABM составляет треть всей пиццы.

Проведём второй разрез, CN. От треугольного куска ABM он отсечёт треугольный кусочек AKN. У треугольников AKN и ABM общий угол A, поэтому отношение их площадей равно отношению $\frac{AB}{AN} \cdot \frac{AM}{AK} = \frac{3}{1} \cdot \frac{7}{3} = \frac{7}{1}$. Иными словами, кусочек AKN составляет одну седьмую куска ABM или одну двадцать первую часть всей пиццы. Разумеется, это же верно и для двух других кусочков, которые взяли Билли, Вилли и Дилли. Значит, племянники дядюшки Скруджа взяли себе $\frac{3}{21} = \frac{1}{7}$ всей пиццы. Доля дядюшки получится, если от всей пиццы отнять взятое племянниками (останется $\frac{6}{7}$ пиццы) и отнять из неё три белых кусочка. Каждый такой кусочек получается удалением от трети пиццы двух долей племянника, поэтому он составляет $\frac{1}{3} - \frac{2}{21} = \frac{5}{21}$ от всей пиццы. Тогда все три белых куска составляют $\frac{5}{7}$ пиццы, и на долю Дядюшки Скруджа приходится $\frac{6}{7} - \frac{5}{7} = \frac{1}{7}$ пиццы — ровно столько же, сколько взяли его три племянника. Утверждение задачи доказано.

Примечание 1: Для решения задачи достаточно найти только одно из отношений, в которых одна тридиана делит другую; так, в приведённом выше решении использовалось только отношение $AK : KM$.

Примечание 2: Поскольку при деформации треугольника (так называемое, аффинное преобразование) отношение площадей не изменяется, для решения задачи достаточно рассмотреть частный случай треугольника, например, правильный треугольник. Разумеется, при таком решении школьник должен сослаться на нужное свойство аффинного преобразования, иначе решение не будет обоснованным.

Примечание 3: Ключевое место в решении задачи — понять, в каком отношении одна тридиана делит другую. Это можно сделать не только способом, указанном в приведённом решении, но и многими другими (например, через теорему Менелая). Если школьник не приводит доказательства этого ключевого факта, а только пишет его формулировку, то это следует считать серьёзным упущением в решении.

<u>*Рекомендации по проверке:*</u>

есть в работе	**баллы**
Верное доказательство	7 баллов
В решении используется без доказтельства верный факт об отношении, в котором тридианы делят одна другую	снять 2 балла
Задача решена для частного случая (например, когда пицца — равносторонний треугольник), но ссылки на свойства аффинных преобразований нет	5 баллов
Верно найдены доли Билли, Вилли и Дилли (вместе или порознь)	4 балла
Найдено, в каком отношении одна из тридиан делит другую	3 балла
Всевозможные построения и выкладки, из которых не видно хода решения	0 баллов

11.4. *Решите систему уравнений*

$$\begin{cases} x\sqrt{1-y^2} &= \dfrac{1}{4}\left(\sqrt{3}+1\right), \\ y\sqrt{1-x^2} &= \dfrac{1}{4}\left(\sqrt{3}-1\right). \end{cases}$$

Решение:

<u>Способ 1.</u> Из области допустимых значений системы следует, что $-1 \leqslant x,\ y \leqslant 1$. Кроме того, оба эти числа положительны, поскольку в правых частях уравнений стоят положительные числа. Поэтому мы вправе считать, что $x = \sin\alpha$, $y = \sin\beta$ для некоторых α и β из отрезка $\left(0; \dfrac{\pi}{2}\right]$. Система при этом примет вид

$$\begin{cases} \sin\alpha\cdot\cos\beta &= \dfrac{1}{4}\left(\sqrt{3}+1\right), \\ \sin\beta\cdot\cos\alpha &= \dfrac{1}{4}\left(\sqrt{3}-1\right). \end{cases}$$

Складывая левые и правые части уравнений, получим $\sin(\alpha+\beta) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, а вычитая, находим, что $\sin(\alpha-\beta) = \dfrac{1}{2}$. Так как число $\alpha-\beta$ лежат на отрезке $\left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$, оно равно $\dfrac{\pi}{6}$. Число $\alpha+\beta$ лежат на отрезке $[0;\,\pi]$, и потому равно либо $\dfrac{\pi}{3}$, либо $\dfrac{2\pi}{3}$. Тогда $\alpha = \dfrac{(\alpha+\beta)+(\alpha-\beta)}{2}$ либо $\dfrac{5\pi}{12}$, либо $\dfrac{\pi}{4}$. Соответствующие этим значениям значения β равны $\dfrac{\pi}{4}$ и $\dfrac{\pi}{12}$ соответственно. Имеем две пары $\left(\sin\dfrac{5\pi}{12};\,\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$ и $\left(\sin\dfrac{\pi}{4};\,\sin\dfrac{\pi}{12}\right)$.

Способ 2. Возведём оба уравнения в квадрат, что является равносильным преобразованием при $0 \leqslant x,\, y \leqslant 1$. Заменив $x^2 = a$, $y^2 = b$, получим систему

$$\begin{cases} a(1-b) &= \dfrac{2+\sqrt{3}}{8}, \\ b(1-a) &= \dfrac{2-\sqrt{3}}{8}. \end{cases}$$

Вычитая из первого уравнения второе, найдём $a-b = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$. Выражая отсюда a и подставив это значение в первое из уравнений системы, получим

$$\left(b+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)\cdot(1-b) = \frac{2+\sqrt{3}}{8}.$$

Решая это квадратное уравнение, находим $b_1 = \dfrac{1}{2}$, $b_2 = \dfrac{2-\sqrt{3}}{4}$. Поскольку имеем $a = b+\dfrac{\sqrt{3}}{4}$, то получаем $a_1 = \dfrac{\sqrt{3}+2}{4}$, $a_2 = \dfrac{1}{2}$. Учитывая неотрицательность чисел x и y, находим два решения системы: $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2};\,\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\right)$ и $\left(\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2};\,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Ответ: $\left\{\left(\sin\dfrac{5\pi}{12};\,\sin\dfrac{\pi}{4}\right),\left(\sin\dfrac{\pi}{4};\,\sin\dfrac{\pi}{12}\right)\right\}$.

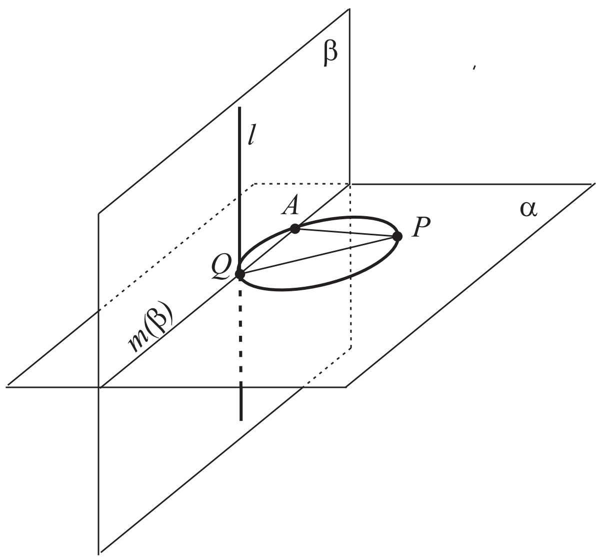
Другая форма записи $\left\{\left(\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2};\,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right),\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2};\,\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\right)\right\}$.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Верный и обоснованный ответ	7 баллов
При верном ходе решения получен неверный ответ из-за ошибок в арифметике или при работе с квадратными корнями	5 баллов
Верно и обосновано найдена только одна пара (x, y), решающая систему	3 балла
Осуществлена тригонометрическая замена или получено верное квадратное уравнение относительно одной из переменных	2 балла
Верный ответ без обоснования или неверный ответ	0 баллов

11.5. *В пространстве проведена прямая l и отмечена точка P, не лежащая на этой прямой. Найдите геометрическое место точек — проекций точки P на всевозможные плоскости, проходящие через прямую l.*

Решение: Пусть данные прямая и точка — это прямая l и точка P ($P \notin l$). Проведём через P плоскость α, перпендикулярную прямой l, и пусть она пересекает прямую l в точке Q. Всякая плоскость β, проходящая через прямую l, пересекается с плоскостью α по некоторой прямой $m(\beta)$, причём $l \perp m(\beta)$. Перпендикуляр PA, опущенный из точки P на $m(\beta)$, будет тогда и перпендикуляром ко всей плоскости β, так как он перпендикулярен пересекающимся прямым l и $m(\beta)$. При этом



К решению задачи 11.5

угол PAQ будет прямым. Значит, искомое ГМТ содержится в окружности с диаметром PQ, лежащей в плоскости α. Легко убедиться в том, что каждая точка этой окружности подходит: при $A = Q$ рассматривается перпендикуляр на плоскость, проходящую через l и перпендикулярную к PQ, при других A достаточно провести плоскость через A и l и опустить на неё перпендикуляр.

<u>*Рекомендации по проверке:*</u>

есть в работе	**баллы**
Верно указано ГМТ и доказано, что любая его точка является основанием какого-нибудь перпендикуляра, а другие точки пространства — не являются	7 баллов
Доказано, что ГМТ содержится среди точек окружности, но не обосновано, что любая точка окружности подойдёт	4 балла
ГМТ указано верно, и доказано, что любая его точка подходит, но не обосновано, что в ГМТ нет точек, отличных от указанных	3 балла
ГМТ указано верно, но обоснование, что оно такое неверно или отсутствует	2 балла
Доказано, что ГМТ содержится в плоскости, проходящей через P и перпендикулярной прямой l	1 балл

11.6. *Шериф считает, что если он поймал в некоторый день количество бандитов, которое является простым числом, то ему повезло. В понедельник и во вторник шерифу везло, а начиная со среды количество пойманных им бандитов было равно сумме позавчерашнего и удвоенного вчерашнего числа. Какое максимальное число дней подряд шерифу могло везти на этой неделе? Ответ обоснуйте.*

Решение: Пусть в понедельник день шериф поймал 7 бандитов, а во вторник — 3. Тогда в среду, четверг и пятницу он поймал соответственно 13, 29 и 71 бандита. Все эти числа — простые, и шерифу везёт пять дней подряд.

Покажем, что шесть дней подряд шерифу вести не может. Заметим, что уже в среду это количество не меньше $2 \cdot 2 + 3 = 7$, и дальше только возрастает. Значит достаточно показать, что в в среду, четверг, пятницу или субботу будет день, когда число пойманных бандитов кратно 3.

Предположим противное, что во все эти дни количество пойманных бандитов не делится на 3. В частности, не делятся на 3 количества бандитов, пойманных в среду и четверг; обозначим их A и B соответственно. Тогда количество бандитов, пойманных в пятницу, равно $A + 2B$. Возможны две ситуации.

1) Остатки от деления на три чисел A и B одинаковы. Тогда имеем, что число $A+2B = A+B+B$ представляет собой сумму трёх чисел с одинаковым остатком от деления на 3, следовательно, делится на 3. Противоречие.

2) Остатки от деления на три чисел A и B разные: один равен единице, второй — двум. Тогда число $A+B$ кратно трём, поэтому число $A+2B = (A+B)+B$ имеет при делении на 3 тот же остаток, что и число B. Значит, количества бандитов, пойманный в четверг и в пятницу, имеют одинаковый остаток от деления на 3. Рассуждая, как в пункте 1, получим, что количество бандитов, пойманных

в субботу, делится на 3. Снова противоречие.

Доказательство завершено.

Ответ: 5 дней.

Примечание: Математическая модель задачи такова: Дана последовательность $\{a_n\}$ натуральных чисел, при всех натуральных n удовлетворяющая соотношению $a_n + 2a_{n+1} = a_{n+2}$. Требуется понять, какое наибольшее количество её последовательных членов могут быть простыми числами.

Ключевым моментом решения является утверждение о том, в среди любых четырёх членов этой последовательности есть хотя бы один, кратный трём. Этот факт может быть доказан по-разному, в том числе перебором всех остатков от деления на 3 чисел a_1 и a_2. Разумеется, перебор должен быть полным.

Из решения также следует, что для получения пяти последовательных простых чисел, одно из чисел a_1 или a_2 обязано равняться 3.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	**баллы**
Верный обоснованный ответ	7 баллов
Обосновано, что 6 дней подряд шерифу везти не может, но нет обоснования, что может везти 5 дней подряд	4 балла
Есть идея рассмотреть остатки от деления на 3 (или любое другое число, кратное 3)	2 балла
Пример, когда шерифу везёт ровно 5 дней без доказательства, что большего числа быть не может	1 балл
Ответ без обоснования или неверный ответ, а также примеры, когда шерифу везёт менее 5 последовательных дней	0 баллов