Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике в 2019 – 2020 учебном году

6 класс

Время выполнения заданий — 4 часа

6.1. *Трёхзначное число в 56 раз больше своей последней цифры. Во сколько раз оно больше своей первой цифры? Ответ обоснуйте.*

Решение:

Способ 1. Последняя цифра такова, что при умножении её на 6 полученное число будет оканчиваться на неё же. Полным перебором убеждаемся, что это может быть любая чётная цифра (и только она). Значит, это трёхзначное число либо 112, либо 224, либо 336, либо 448 (вариант с последней цифрой 0 не годится, так как получится не трёхзначное число). Во всех ситуациях ответ 112.

Способ 2. Пусть число имеет вид $\overline{abc}$. Тогда по условию $100a + 10b + c = 56c$, откуда $20a + 2b = 11c$. Число $11c$, следовательно, кратно 2, то есть цифра c — чётна, $c = 2d$ ($d \leqslant 4$). Значит, $10a + b = 11d$. Но $10a + b = \overline{ab}$. В силу того, что это число делится без остатка на 11, $a = b$. Тогда $d = a$ и исходное число имеет вид $\overline{aa(2a)} = a \cdot \overline{112}$, то есть оно больше своей первой цифры в 112 раз.

Ответ: 112.

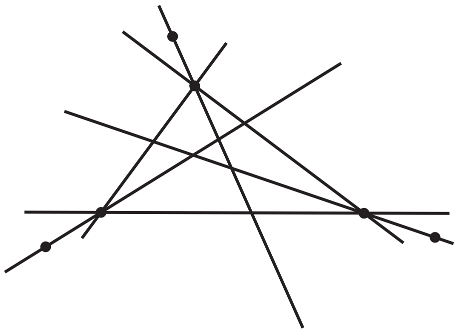
Рекомендации по проверке:

есть в работе	**баллы**
Получен верный ответ и обоснована его единственность	7 баллов
Обоснованно получен верный ответ, но ни одно из чисел, его реализующих, не приведено	баллы не снижаются
Найдены все возможные числа (112, 224, 336 и 448), но не обосновано, что других чисел нет	3 балла
При решении методом полного перебора не все случаи разобраны	2 балла
Найдены некоторые из чисел 112, 224, 336 и 448 или указан верный ответ без обоснования	1 балл

6.2. *Отметьте на плоскости 6 различных точек и проведите 6 прямых так, чтобы и на каждой прямой, и по обе стороны от неё было по две отмеченных точки.*

Решение: Например, так, как показано на рисунке.

Примечание: Требуемую конструкцию можно описать и словами. Например, так: Рассмотрим некоторый треугольник ABC и проведём через его вершины по прямой, пересекающей противоположную сторону. Отметим на прямых по точке D, E, F так, чтобы лучи AD, BE и CF не пересекали треугольник. Точки A, B, C, D, E, F и проведённые прямые — те, которые требуются.



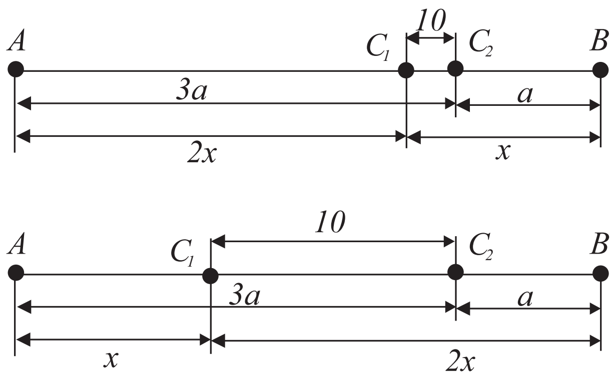
К решению задачи 6.2

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Верная конструкция (нарисованная или описанная словами)	7 баллов
Неверные конструкции (в любом количестве)	0 баллов

6.3. *По дороге из города A в город B через каждый километр стоят километровые столбы. На каждом столбе с одной стороны написано расстояние до A, а с другой — расстояние до B. Утром турист проходил мимо столба, на котором одно число было вдвое больше другого. Пройдя еще 10 км, турист увидел столб, на котором два числа отличались в три раза. Каково расстояние от A до B? Приведите все варианты ответа и докажите, что других нет.*

Решение: Пусть C_1 и C_2 — столбы, о которых идёт речь в задаче (C_1 — столб, возле которого турист был утром). Без ограничения общности считаем, что турист шёл из A в B. Тогда возможны две ситуации: 1) $C_1A = 2C_1B$ или 2) $C_1B = 2C_1A$. Так как $C_2A > C_1A$, ситуация $C_2B = 3C_2A$ невозможна, поэтому имеет место ситуация $C_2A = 3C_2B$.



К решению задачи 6.3

1) Если $C_1A = 2C_1B$, то C_1A составляет $2/3$ всего расстояния AB. Тогда от второго столба расстояние до A составляет $\dfrac{3}{4}$ расстояния AB, то есть турист прошёл $\dfrac{3}{4} - \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{12}$ этой дистанции. Значит, $AB = 120$ км.

2) Если $C_1B = 2C_1A$, то $C_1A = \frac{1}{3}AB$. Тогда за день турист прошёл $\frac{3}{4} - \frac{1}{3} = \frac{5}{12}$ всей дистанции. Отсюда $AB = 24$ км.

Ответ: или 120 км, или 24 км.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	**баллы**
Верный и полностью обоснованный ответ	7 баллов
Ход решения полностью верен, но имеются вычислительные ошибки, возможно, приведшие к неверному ответу	6 баллов
Верно рассмотрен только один из двух случаев; (обосновано получен один из двух ответов)	3 балла
Верный указаны оба ответа (120 км и 24 км) или без обоснования, или с неверным обоснованием	2 балла
Приведён только пример, реализующий один из двух случаев	1 балл
Всевозможные рассуждения и выкладки, не приведшие к решению	0 баллов

6.4. *Когда Винни-Пух пришел в гости к Кролику, он съел* 3 *тарелки мёда,* 4 *тарелки сгущёнки и* 2 *тарелки варенья, а после этого не смог выйти наружу из-за того, что сильно растолстел от такой еды. Но известно, что если бы он съел* 2 *тарелки мёда,* 3 *тарелки сгущёнки и* 4 *тарелки варенья или* 4 *тарелки мёда,* 2 *тарелки сгущёнки и* 3 *тарелки варенья, то спокойно смог бы покинуть нору гостеприимного Кролика.*

От чего больше толстеют: от варенья или от сгущенки? Ответ обоснуйте.

Решение:

Способ 1. Пусть одна тарелка мёда имеет калорийность a ед, одна тарелка сгущёнки — b ед, одна тарелка варенья — c ед. (Чем выше калорийность продукта, тем больше от него толстеют.) Условие задачи означает, что $3a+4b+2c > 2a+3b+4c$ и $3a+4b+2c > 4a+2b+3c$. Первое неравенство сводится к виду $a > 2c-b$, второе — к виду $a < 2b-c$. Тогда $2b-c > 2c-b$, откуда $b > c$, то есть калорийность сгущёнки выше.

Способ 2. Пусть Винни-Пухов было 4. Первые двое съели каждый по 3 тарелки мёда, 4 тарелки сгущёнки и 2 тарелки варенья (и оба не смогли выйти наружу), третий и четвёртый съели тарелок мёда, сгущёнки и варенья соответственно 2, 3, 4 и 4, 2, 3. Тогда третий и четвёртый поправились меньше, чем первый и второй. Заметим, что первый и второй вместе съели мёда 6 тарелок — столько же, сколько третий и четвёртый вместе — но сгущенки съели 8 тарелок против 5, то есть на 3 тарелки больше, а варенья — 4 против 7, на те же 3 тарелки меньше. Значит, с 3 тарелок сгущенки толстеют сильнее, чем с 3 тарелок варенья.

Способ 3. Уберём отовсюду по 2 тарелки каждого продукта. Тогда окажется, что, во-первых, от тарелки мёда и двух тарелок сгущёнки толстеют сильнее, чем от тарелки сгущёнки и двух тарелок варенья; следовательно, тарелка мёда и тарелка сгущёнки даёт бóльшую прибавку к весу, чем две тарелки варенья. Во-вторых, от тарелки мёда и двух тарелок сгущёнки толстеют сильнее, чем от тарелки варенья и двух тарелок мёда; следовательно, две тарелки сгущёнки дают большую прибавку к весу, чем тарелка мёда и тарелка варенья. Сопоставляя эти два вывода, получим, что тарелка мёда и три тарелки сгущёнки сытнее, чем тарелка мёда и три тарелки варенья, а, значит, сгущёнка сытнее варенья.

Ответ: От сгущёнки толстеют больше.

Примечание: Из условия задачи нельзя сделать вывод, какое место в цепи калорийности занимает мёд: он может быть и самым высококалорийным, и самым низкокалорийным из трёх продуктов, а равно занимать промежуточное по калорийности значения. Таким образом, любой вывод о соотношении калорийности мёда и сгущёнки (равно мёда и варенья) неверен.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	**баллы**
Верный и полностью обоснованный ответ	7 баллов
Условие задачи верно записано через неравенства, но задача до ответа не доведена	3 балла
Ответ без обоснования	0 баллов

6.5. 101 *человек купили* 212 *воздушных шариков четырёх цветов, причём каждый из них купил хотя бы один шар, но при этом ни у кого не оказалось двух шаров одно цвета. Число людей, купивших* 4 *шара, на* 13 *больше числа людей, купивших* 2 *шара. Сколько человек купили только один шар? Приведите все варианты ответа и докажите, что других нет.*

Решение:

Способ 1. Сначала исключим 13 человек, купивших 4 шара. Останется 88 человек, купивших в сумме 160 шаров, причём каждый купил от 1 до 4 шаров, и людей, купивших 2 и 4 шара сейчас поровну. Пусть теперь каждый, купивший 4 шара, подарит один шар тому, у кого шара 2. Теперь у всех либо 1 шар, либо 3, а общее число людей и шаров то же самое. Пусть теперь каждый отпустит в небо по 1 шару; останется 72 шара на руках, причём у каждого будет либо 2 шара, либо ни одного. Значит, сейчас всего с шарами 36 человек, а остальные 52 шаров не имеют. Это и есть те люди, у которых изначально был один шар.

Способ 2. Пусть x_i ($1 \leqslant i \leqslant 4$) — количество людей, купивших ровно i шаров. По условию задачи имеем систему

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 101, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 212, \\ x_4 - x_2 = 13. \end{cases}$$

Прибавляя к первому уравнению системы третье, получим $x_1 + x_3 + 2x_4 = 114$ (откуда $x_3 + 2x_4 = 114 - x_1$), а прибавляя ко второму уравнению удвоенное третье, найдём, что $x_1 + 3x_3 + 6x_4 = 238$. Тогда

$$238 = x_1 + 3(x_3 + 2x_4) = x_1 + 3(114 - x_1) = 342 - 2x_1.$$

Отсюда $x_1 = 52$.

Ответ: 52 человека.

Примечание: Решая систему из второго способа решения, можно найти все возможные распределения шаров по людям: $x_1 = 52$, $x_2 = a$, $x_3 = 36 - 2a$, $x_4 = a + 13$ (a — целое число из отрезка $[0; 18]$).

Рекомендации по проверке:

есть в работе	**баллы**
Верный и полностью обоснованный ответ	7 баллов
При верном ходе решения имеются арифметические ошибки, возможно, приведшие к неверному ответу	-1 балл за каждую ошибку
Верно составлена, система уравнений, описывающая условия задачи, при этом задача до ответа не доведена	3 балла
Приведён верный конкретный случай (или случаи, но не все) распределения шаров по людям	1 балл
Ответ без обоснования и/или неверный ответ	0 баллов