ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ. 2019–2020 уч. г.
МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП. 7 КЛАСС

Задания, ответы и критерии оценивания

Каждое задание оценивается максимально в 7 баллов

7.1. Каждый из учеников 7Б класса за неделю на уроках математики съел одинаковое количество шоколадок. Девять из них за неделю вместе съели меньше 288 шоколадок, а десять из них вместе съели больше, чем 300 шоколадок. По сколько шоколадок съел каждый ученик 7Б класса? Ответ объясните.

Ответ: По 31 шоколадке.

Решение 1: Поскольку десять учеников съели больше, чем 300 шоколадок, то девять учеников съели больше, чем (310:10)·9 = 270 шоколадок. При этом известно, что девять учеников вместе съели меньше, чем 288 шоколадок. Единственное делящееся на 9 число в промежутке от 271 до 287 – это 279. Значит, 9 учеников съели 279 шоколадок, а один ученик – 31 шоколадку.

Решение 2: Т.к. девять учеников за неделю вместе съели меньше 288 шоколадок, то один ученик за неделю съел меньше, чем 288:9 = 32 шоколадки. Т.к. десять учеников за неделю вместе съели больше, чем 300 шоколадок, то один ученик за неделю съел больше, чем 300:10 = 30 шоколадок. Окончательно, каждый ученик съел больше 30, но меньше 32, т.е. 31 шоколадку.

Критерии: Только ответ – 0 баллов. 7 баллов ставить за верный ответ при наличии верных рассуждений. 3-5 баллов – за частичное продвижение в решении.

7.2. Найдите наибольшее натуральное число, у которого каждая цифра, начиная с третьей, равна сумме всех предыдущих цифр числа.

Ответ: 101248.

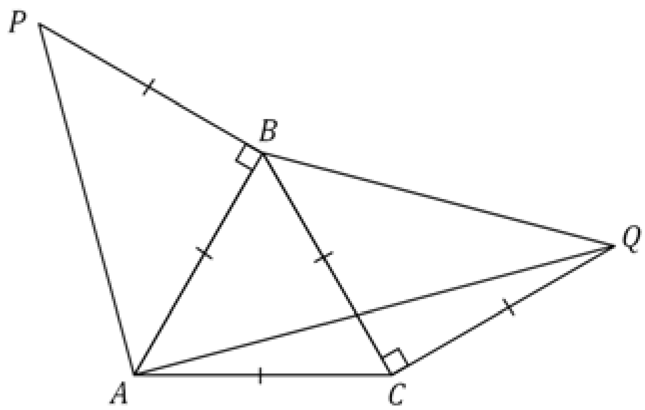
Решение: Пусть первая цифра числа – a, вторая – b. Тогда третья цифра – $(a + b)$, четвертая – $(2a + 2b)$, пятая – $(4a + 4b)$, шестая – $(8a + 8b)$. Седьмой цифры быть не может, т.к. если она есть, то равна $(16a + 16b)$, но это выражение может быть цифрой только при $a = b = 0$. Значит, искомое число шестизначное. Теперь надо подобрать максимальное возможное значение a, чтобы при этом шестая цифра оставалась «цифрой», т.е. чтобы выполнялось неравенство $8a + 8b < 10$. Это возможно при $a = 1$, $b = 0$, т.е. искомое число будет 101248.

Критерии: Верный ответ – 4 балла (возможно, без объяснения). Правильными рассуждениями получено, что искомое число шестизначное, но пример не построен – 3 балла. 7 баллов ставить при наличии доказательства, что числа больше 101248 быть не может (верный способ построения примера может рассматриваться как доказательство).

7.3. Дан равносторонний треугольник ABC. На сторонах AB и BC внешним образом построены равнобедренные прямоугольные треугольники ABP и BCQ с прямыми углами ∠ABP и ∠BCQ. Найдите угол ∠PAQ.

Ответ: 90∘.

Решение: Рассмотрим треугольник ACQ. Он равнобедренный, т.к. AC = BC (по условию равностороннего треугольника ABC), а BC = CQ (по условию равнобедренности треугольника BCQ). Угол при вершине ∠ACQ = 60∘ + 90∘ = 150∘. Тогда ∠CAQ = (180∘ – 150∘) : 2 = 15∘. Искомый угол ∠PAQ = ∠PAB + ∠BAQ = ∠PAB + ∠BAC – ∠CAQ = 45∘ + 60∘ – 15∘ = 90∘.



Критерии: Только ответ - 0 баллов. Частично верное продвижение в решении – 3-5 баллов.
7 баллов – верное ответ при наличии верного решения.

7.4. Для проведения муниципального этапа Всероссийской олимпиады школьников было задействовано 12 кабинетов школы N (все кабинеты находятся на одном этаже и идут в ряд).

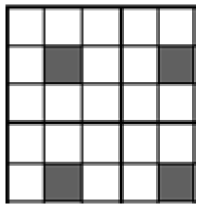
Оказалось, что количество учеников в соседних кабинетах отличается на одного. Могло ли для участия в олимпиаде прийти 245 учеников?

Ответ: Не могло.

Решение: Количество учеников в двух соседних кабинетах отличается на 1, поэтому в этих двух кабинетах вместе нечетное количество учеников. Пар таких кабинетов шесть. Тогда общее число учеников, принявших участие в олимпиаде – сумма шести нечетных чисел, т.е. чётное число. А 245 – нечетное. Значит, на олимпиаду не могло прийти 245 учеников.

Критерии: Только ответ – 0 баллов. Идея чётности, но решение не доведено до конца – 3 балла. Полное верное решение – 7 баллов.

7.5. Какое наименьшее количество клеток нужно отметить на доске размером 5 на 5 клеток, чтобы среди отмеченных клеток не было соседних (имеющих общую сторону или общую вершину), а добавление к этим клеткам любой одной клетки нарушало первое условие?



Ответ: 4 клетки.

Решение: *Оценка*. Разобьём доску на четыре части (см. рис.). В каждой из них должна быть отмечена клетка, иначе содержащуюся в ней чёрную клетку можно добавить.

Пример. Четыре чёрные клетки на рисунке удовлетворяют обоим условиям.

Критерии: Только ответ – 0 баллов. Только оценка – 5 баллов. Только пример – 2 балла. 7 баллов ставить при наличии оценки и примера.