Муниципальный этап всероссийской олимпиады школьников по математике

7 класс

7.1. Карлсон пересчитывает 200 плюшек, которые испекла Фрекен Бок: «один, два, три, …, сто девяносто восемь, сто девяносто девять, двести». Сколько всего слов он произнесет? (Каждое слово считается столько раз, сколько раз оно было произнесено.)

Ответ: 443 слова.

Решение. Одно слово потребуется для произношения 29-ти чисел: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100, 200.

Среди первых 99 чисел количество произносимых в два слова: $99 - 27 = 72$, соответственно, количество слов для их произнесения $2 \cdot 72 = 144$.

В следующей сотне (от 101 до 199) каждое число, произносимое в первой сотне в одно слово, будет произноситься в два, и количество слов: $2 \cdot 27 = 54$. Остальные произносятся в три слова: $3 \cdot (99 - 27) = 216$.

То есть для пересчета всех плюшек понадобится $29 + 144 + 54 + 216 = 443$ слова.

Критерии.

1 балл. Обоснованно найдено количество чисел произносимых одним словом.

2 балла. Верно и обоснованно найдено количество слов необходимых, чтобы произнести числа от 1 до 99.

2 балла. Верно и обоснованно найдено количество слов необходимых, чтобы произнести числа от 100 до 199 или 200.

Комментарий. Баллы по критериям выше суммируются.

3 балла. Верный ответ без обоснований.

7.2. Расставьте в клетки таблицы 3×3 целые числа так, чтобы сумма чисел во всей таблице была положительной, а сумма чисел в любом квадрате 2×2 была отрицательной.

Ответ: Например,

1	1	1
1	-6	1
1	1	1

.

Критерий.

7 баллов. Любой верный пример.

Комментарий. Существует несколько различных правильных примеров.

7.3. В тетради выписаны все несократимые дроби с числителем 15, которые больше $\frac{1}{16}$ и меньше $\frac{1}{15}$. Сколько всего таких дробей выписано в тетради?

Ответ: 8 дробей.

Решение. Ищем все подходящие несократимые дроби вида $\frac{n}{15}$. Так как $\frac{1}{16} < \frac{15}{n}$, то $\frac{15}{240} < \frac{15}{n}$, тогда $n < 240$. Так как $\frac{1}{15} > \frac{15}{n}$, то $\frac{15}{225} > \frac{15}{n}$, и $n > 225$. Значит, $225 < n < 240$. Дробь $\frac{n}{15}$ несократима, то есть n не делится ни на 3, ни на 5. Несложно убедиться, что из диапазона от 226 до 239 (14 чисел) нужно исключить 6 чисел (228, 230, 231, 234, 235, 237). Остается 8 возможных значений n.

Критерии.

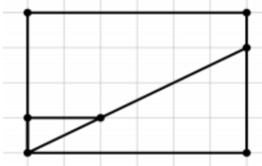
1 балл. Верный ответ без верного обоснования.

3 балла. Верно получен диапазон для n.

0 баллов. При переборе дробей рассмотрены не все случаи.

Комментарий. Вполне возможно, участники будут пытаться выписать все такие дроби, а потом обосновывать, почему знаменатель не может быть больше или меньше, – внимательно следить за аккуратностью таких обоснований.

7.4. Разрежьте прямоугольник со сторонами 4×6 на два треугольника и пятиугольник так, чтобы из них можно было сложить прямоугольник 3×8. (Покажите, как сделать разрез и как сложить.)

Ответ:  и .

Критерии.

5 баллов. Приведено одно из двух разрезаний (квадрата или прямоугольника) и не приведено второе.

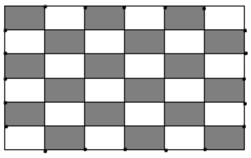
7.5. Лёша закрашивает клетки внутри квадрата 6×6, нарисованного на клетчатой бумаге. Потом он отмечает те узлы (пересечения линий клетчатой бумаги), к которым примыкает одинаковое количество закрашенных и не закрашенных квадратов. Какое наибольшее число узлов может оказаться отмеченным?

Ответ: 45.

Решение.

Оценка. Каждый узел сетки принадлежит одному, двум или четырем квадратам.

К угловым вершинам исходного квадрата примыкает всего по одному маленькому квадрату, значит, Лёше не удастся их отметить. Следовательно, наибольшее количество отмеченных узлов не превышает $7 \cdot 7 - 4 = 45$.

Пример. .

При шахматной раскраске Лёше удастся отметить все узлы, кроме точек описанных выше.

<u>Критерии.</u>

2 балла. Придумана верная раскраска, неверно посчитано количество узлов.

3 балла. Приведён верный пример.

3 балла. Доказана оценка.

7 баллов. Полное верное обоснованное решение.