Всероссийская олимпиада школьников 2019/2020 уч. г.
Муниципальный этап
Математика
7 класс

Общее время выполнения работы – 3 часа 00 мин.
Максимальная сумма баллов 35.

Во время Олимпиады участники не имеют права общаться друг с другом, свободно перемещаться по аудитории; не вправе пользоваться справочными материалами, средствами связи и электронно-вычислительной техникой. При установлении факта нарушения участником Олимпиады Порядка или использования во время тура запрещенных источников информации решением Оргкомитета такой участник лишается возможности дальнейшего участия в Олимпиаде.

Общие критерии оценки:
7 баллов ставится за полностью решенную задачу.
6-7 баллов ставится, если решение верное, но имеются небольшие недочеты.
5-6 баллов ставится, если решение в целом верное, но имеются существенные ошибки, не влияющие на логику рассуждений.
4 балла ставится, если верно рассмотрен один из двух (более сложный) случай, или в задаче типа «оценка + пример» верно получена оценка.
2-3 балла ставится, если получены вспомогательные утверждения, помогающие при решении задачи.
1 балл ставится, если рассмотрены отдельные случаи при отсутствии решения.
0 баллов, ставится, если нет продвижений в решении, даже если при этом дан верный ответ.
Решение школьника не обязано совпадать с предложенными, тогда оно оценивается также в соответствии указанной выше схемой оценок.

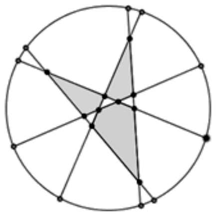
Задание 7.1
Лист бумаги имеет форму круга. Можно ли провести на нем пять отрезков, каждый из которых соединяет две точки на границе листа так, чтобы среди частей, на которые эти отрезки делят лист, нашлись пятиугольник и два четырехугольника?

Количество баллов 7
Ответ:

можно

Решение

Например, см. рисунок. Два четырехугольника и пятиугольник выделены серым цветом.

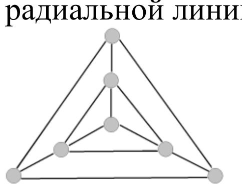


Задание 7.2
Имеется 30 бревен, длины которых 3 или 4 метра, а их суммарная длина равна ста метрам. Каким количеством распилов можно распилить все эти бревна на куски длиной 1 метр? (Каждым распилом пилится ровно одно бревно).
Количество баллов 7

Ответ:
70
Решение
Первый способ
Суммарная длина бревен равна 100 метров. Если бы это было одно бревно, то понадобилось бы 99 распилов. Так как это 30 бревен, то 29 распилов уже сделано. Значит, осталось сделать еще 99 – 29 = 70 распилов.
Второй способ
Найдем количество бревен каждого вида. Если бы все они были трёхметровые, то их суммарная длина была бы равна 90 метров. А так как она равна 100 метров, то всего есть 10 бревен по 4 метра и 20 бревен по 3 метра. Для каждого бревна длиной 4 метра потребуется три распила, а для каждого бревна длиной 3 метра – два распила. Итого: $10\times3 + 20\times2 = 70$ распилов.

Дополнительные критерии проверки.
«4 или 5 баллов» Приведено верное в целом рассуждение, но допущена вычислительная ошибка
«2 или 3 балла» Приведен только верный ответ или верный ответ, полученный на конкретном примере

Задание 7.3
Имеет ли решение ребус АПЕЛЬСИН – СПАНИЕЛЬ = $2018\cdot2019$?
Количество баллов 7
Ответ:
не имеет
Решение
Числа АПЕЛЬСИН и СПАНИЕЛЬ состоят из одних и тех же цифр, значит, их разность делится на 9. Но $2018\cdot2019$ на 9 не делится.

Задание 7.4
Можно ли в кружки на рисунке вставить числа 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49 так, чтобы на каждой радиальной линии и в каждом треугольнике сумма чисел была одна и та же?

Количество баллов 7
Ответ:
нельзя
Решение
Пусть S – эта сумма, тогда $5S = 2(1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 + 49) + x$, где x – число, стоящее в центре.
Т.к. $1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 + 49 = 140$,
то $x = 5S – 280$, т.е. x делится на 5, а значит $x = 25$, а тогда $S = 61$.
Но радиальная линия содержащая число 49 дает сумму более $25 + 49 = 74 > 61$. Поэтому расстановка невозможна.

Задание 7.5
На клетчатой доске размером 8×8 Петя закрашивает несколько клеток. Вася выиграет, если сможет накрыть все эти клетки не пересекающимися и не вылезающими за границу квадрата уголками из трёх клеток. Какое наименьшее количество клеток должен закрасить Петя, чтобы Вася не выиграл?

Количество баллов 7
Ответ:
64 клетки
Решение
Так как 64 не делится на 3, то всю доску (64 клетки) нельзя покрыть не пересекающимися и не вылезающими за границу квадрата уголками из трёх клеток. Покажем, что любые 63 покрашенных клеток можно покрыть такими уголками. Разобьём квадрат 8×8 на четыре квадрата размером 4×4, а каждый квадрат 4×4 на четыре квадрата размером 2×2. Тогда единственная не покрашенная клетка попала в какой-то один из квадратов 2×2, а этот квадрат попал в какой-то один из квадратов 4×4. Любые три полностью покрашенных квадрата 2×2 (см. рис. слева) можно покрыть уголками из трёх клеток, а в четвёртом квадрате любые три покрашенные клетки всегда можно покрыть одним уголком, поэтому и любые три полностью покрашенных квадрата 4×4 можно покрыть уголками из трёх клеток (см. рис. справа).