

Ответы муниципального этапа ВсОШ по математике

7 класс

7.1. Маша опросила подружек из своего ансамбля и получила следующие ответы: 25 из них занимаются математикой, 30 были в Москве, 28 ездили на поезде. Среди ездивших на поезде 18 занимаются математикой и 17 были в Москве. 16 подружек занимаются математикой и были в Москве, притом среди них 15 еще и ездили на поезде. При этом в ансамбле всего 45 девочек. Возможно ли это?

Ответ. Нет.

Решение. Посчитаем количество девочек, которые не были в Москве, не занимаются математикой, и не ездили на поезде. Получим $45-25-30-28+16+18+17-15=-2<0$, чего быть не может.

7.2. В столовой стоят шестнадцать чашек с чаем. Маше надо сделать так, чтобы во всех чашках чая было поровну, причем за один шаг можно брать и уравнивать количество чая ровно в двух чашках. Сможет ли Маша выполнить задание?

Ответ. Да.

Решение. 16 - это степень двойки. Решим эту задачу сначала для четырех чашек, потом для 8, потом для 16.

Разделим чашки на пары: 1-2, 3-4, 5-6, 7-8, 9-10, 11-12, 13-14, 15-16 и уравнием количества чая в каждой паре чашек. Теперь у нас две совершенно одинаковые восьмерки: 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15 и 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16. Уравнием количество чая в чашках первой восьмерки и точно таким же способом в чашках второй. Разделим эти чашки по парам (для первой восьмерки) 1-3, 5-7, 9-11, 13-15, получим 2 одинаковые четверки: 1, 5, 9, 13 и 3, 7, 11, 15. В каждой четверке разделим четыре чашки по парам и, уравнивая количества воды в этих парах, сведем задачу к случаю двух чашек. Но в двух чашках количество воды можно уравнивать по условию. Со второй восьмеркой чашек делаем точно так же.

7.3. В 60 люстрах (у каждой люстры по 4 плафона) нужно поменять плафоны. У каждого электрика на смену одного плафона уходит 5 минут. Всего будет работать 48 электриков. Одновременно менять в люстре два плафона нельзя. Какое наименьшее время необходимо для смены всех плафонов во всех люстрах?

Ответ. 25 минут

Решение. Покажем, как надо действовать. Сначала 48 электриков меняют по одному плафону в 48 люстрах, на это уходит 5 минут, и у 48 люстр один плафон заменен, у 12 — ни один не заменен. Затем 12 электриков меняют плафоны у тех люстр, у которых еще не меняли, остальные 36 электриков меняют в 36 люстрах вторые плафоны. На это опять уходит 5 минут, получаем 36 люстр с двумя новыми плафонами и 24 — с одним. Теперь 24 электрика меняют вторые плафоны, и 24 — третьи. Теперь 24 люстры с тремя новыми плафонами и 36 — с двумя. Теперь 36 электриков меняют 36 третьих плафонов и 12 электриков — 12 четвертых плафонов. Теперь 48 люстр с тремя новыми плафонами и 12 — с четырьмя. Последний этап — 48 электриков меняют последние плафоны на 48 люстрах. Итак, за 5 этапов, т.е. за 25 минут, все плафоны в люстрах заменены. Покажем, что меньше чем за 25 минут это сделать нельзя. Нужно заменить $60 \cdot 4 = 240$ плафонов. На каждый плафон нужно 5 минут, значит, всего не меньше, чем $240 \cdot 5 = 1200$ минут. Но у нас есть 48 электриков, значит, это можно сделать за $1200 : 48 = 25$ минут, но никак не меньше.

7.4. Найдите периметр прямоугольника, если сумма длин двух его сторон равна 10дм, а трех сторон — 14дм.

Ответ. 18дм, 19дм или 20дм.

Решение. Если сумма двух соседних сторон равна 10дм, то периметр равен 20дм, причём это не противоречит условию на сумму трёх сторон. Если сумма противоположных сторон равна 10дм, то каждая из этих сторон равна 5дм. При этом соседняя с ними сторона равна 4дм или 4,5дм.

7.5. Тренер по баскетболу хочет взять к себе в команду трех самых высоких мальчиков. Всего на просмотр пришли 25 мальчиков, каждые два из которых разного роста. За один раз тренер может посмотреть 5 мальчиков и присвоить им места с 1 по 5. Как нужно организовать просмотр мальчиков, чтобы тренер мог выбрать себе ребят в команду за 7 просмотров?

Решение. Разобьём всех мальчиков на пять групп по пять мальчиков в каждой. Сравним мальчиков внутри каждой группы. На это потребуется 5 просмотров. Шестым просмотром сравним самых высоких мальчиков каждой группы. После этого обозначим группы буквами А, Б, В, Г, Д в порядке убывания роста самых высоких в группе, а мальчиков внутри группы обозначим индексами 1, 2, 3, 4, 5 также в порядке убывания их роста. Составим таблицу роста мальчиков.

A_1	B_1	V_1	Γ_1	D_1
A_2	B_2	V_2	Γ_2	D_2
A_3	B_3	V_3	Γ_3	D_3
A_4	B_4	V_4	Γ_4	D_4
A_5	B_5	V_5	Γ_5	D_5

Заметим, что мальчики из групп Γ и D не могут попасть в команду, так как рост каждого из них меньше, чем рост мальчиков A_1 , B_1 и V_1 . Также попасть в команду не могут мальчики A_4 , B_4 , V_4 , A_5 , B_5 , V_5 . Кроме того, так как $A_1 > B_1 > V_1 > V_2 > V_3$, то попасть в команду не смогут и ребята V_2 и V_3 . А так как $A_1 > B_1 > B_2 > B_3$, то и B_3 – не попадет. Таким образом, в команду могут попасть только шесть мальчиков: A_1 , A_2 , A_3 , B_1 , B_2 , V_1 . Но уже известно, что мальчик, обозначенный A_1 , – самый высокий. Седьмым просмотром мы сравним 5 остальных мальчиков и тем самым выявим ребят, имеющих второй и третий по величине рост.