7 класс

7.1. Семь последовательных натуральных чисел как-то расставили по кругу. После этого для каждой пары соседних чисел вычислили разность между ними (из большего числа вычли меньшее). Могли ли пять подряд идущих разностей (из семи) равняться числам 2, 1, 6, 1, 2?

Ответ. Не могли.

Решение. Вычтем из всех данных чисел наименьшее из них. Эта операция не изменит разности между числами. Таким образом, можно считать, что по кругу расставили числа $A = 0$, $B = 1$, $C = 2$, $D = 3$, $E = 4$, $F = 5$, $G = 6$. Разность 6 – максимальная из возможных разностей, и она может быть получена только как разность $G - A$. Стоящие рядом с разностью 6 единицы могут быть получены, только если рядом с A стоит B, а рядом с G стоит F. Для того, чтобы получить разности 2, рядом с F должно стоять число D, и рядом с B также должно стоять число D. А это невозможно.

Комментарий. Верный ответ без обоснований – 0 баллов.
Идея «вычитания наименьшего числа» отдельно не оценивается. За ее отсутствие баллы не снимаются. За ее наличие баллы не добавляются.

7.2. Пункты A, B, C, D расположены в вершинах прямоугольника $ABCD$, его стороны и диагонали AC и BD – дороги. Первая машина проехала за час по маршруту $B \to C \to A \to D$, а вторая проехала за час по маршруту $D \to B \to C \to A$. Через какое время машины встретятся, если они одновременно выедут из пункта C: первая по маршруту $C \to B \to D$, вторая – по маршруту $C \to A \to D \to B$, а встреча произойдет на дороге BD? (Скорости обеих машин постоянны).

Ответ. Через 40 минут.

Решение. Диагонали прямоугольника имеют одинаковую длину и длиннее любой его стороны. За один час вместе обе машины проехали бы трижды сторону BC и трижды диагональ, так как одна проезжает за час две стороны, равные BC, и одну диагональ, а вторая проезжает за час две диагонали, и одну сторону, равную BC. Значит, за треть часа, то есть за 20 минут вместе машины проедут одну сторону, равную BC, и одну – равную диагонали. А весь описанный маршрут до встречи на BD они проедут за вдвое больший промежуток времени.
Комментарий. Верный ответ без обоснований – 1 балл.
Верный ответ получен на примере – 3 балла.

Замечание. Можно доказать (но в задаче это не требуется), что встреча обязательно произойдет на дороге BD.

7.3. Можно ли так расставить по кругу 100 чисел 1 и 101 число –1 так, чтобы произведение любых трех подряд идущих чисел было положительным?

Ответ. Нельзя.

Решение. Предположим, что такое возможно. Так как всего чисел $100+101=201=3\cdot 67$, то разобьем их все на 67 троек подряд идущих чисел. В каждой тройке произведение чисел положительно, поэтому произведение всех чисел также положительно. Но произведение 100 чисел 1 и 101 числа –1 равно –1, то есть отрицательно.

Комментарий. Верный ответ без обоснований – 0 баллов.

7.4. Найдите все решения ребуса КОРОВА + КОРОВА = МОЛОКО. Разным буквам соответствуют разные цифры, одинаковым – одинаковые.

Ответ. Два решения (302015 + 302015 = 604030 и 304015 + 304015 = 608030).

Решение. Равенство в разряде сотен могло быть только в двух случаях: 0 + 0 = 0, то есть О = 0, такое могло быть только если не было переносов из десятков в сотни; а также если О = 9 (в случае переноса единицы из десятков в сотни). Но сумма А + А заканчивается на О, поэтому О – четная цифра, значит О = 0 и тогда А = 5.

Далее, ни в К + К, ни в Р + Р, ни в В + В нет перехода через десяток (слагаемые и сумма – шестизначные и нет соответствующих переносов), значит, все эти цифры не больше 4 (и ненулевые: О = 0). При этом К = 3, так как В + В + 1 = К. Отсюда В = 1. Осталось два варианта для цифры Р, и оба подходят.

Комментарий. Доказано, что О = 0 – 2 балла.
Найдены цифры А, В, К – 2 балла.
Найден только один вариант цифры Р – 1 балл.
Верно получен только один из двух ответов без обоснований – 1 балл.
Верно получены оба ответа без обоснований – 3 балла.

7.5. В зале находятся лжецы и рыцари. Лжецы всегда лгут, а рыцари всегда говорят правду. Каждый указал на одного из присутствующих и сказал: «Он – лжец». Оказалось, что про каждого из находящихся в зале кто-то такую фразу сказал. Могло ли в зале быть ровно 101 человек?

Ответ. Не могло.

Решение. Предположим, что в зале мог быть ровно 101 человек. Так как каждый указал на одного из присутствующих, а на каждого из присутствующих кто-то указал, то на каждого указал ровно один из присутствующих. Заметим, что рыцарь мог указать только на лжеца, а лжец – только на рыцаря.

Посмотрим теперь на какого-нибудь рыцаря *А*. Он указал на какого-то лжеца. Тот указал на какого-то рыцаря. Продолжая эту «цепочку» мы получим, что рано или поздно какой-то лжец укажет на рыцаря *А*, так как на других людей в цепочке уже кто-то указывает. Поэтому все присутствующие разобьются на замкнутые цепочки (циклы) четной длины (возможно, длины 2). Но 101 – нечетно. Противоречие.

Комментарий. Верный ответ без обоснований – 0 баллов.
Замечено, что на каждого указал ровно один из присутствующих – 2 балла.
Замечено, что рыцарь мог указать только на лжеца, а лжец – только на рыцаря – 1 балл.
Утверждается, что цепочка получилась одна (а не несколько) – не более 5 баллов за задачу.