

**МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ  
ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ  
2019/2020 УЧЕБНЫЙ ГОД  
8 КЛАСС (решения)**

1. (7 баллов) Сравните  $3^{76}$  и  $5^{50}$ .

**Решение.**  $3^{76} = 3^4 \cdot 3^{72} = 81 \cdot (3^3)^{24} = 81 \cdot (27)^{24}$ .

$5^{50} = 5^2 \cdot 5^{48} = 25 \cdot (5^2)^{24} = 25 \cdot (25)^{24}$ .

Так как  $81 > 25$  и  $27 > 25$ , то  $3^{76} > 5^{50}$ .

**Ответ.**  $3^{76} > 5^{50}$ .

2. (7 баллов) Сумма ста чисел равна 1000. Самое большое из них увеличили в два раза, а ещё одно число уменьшили на 10. Оказалось, что сумма не изменилась. Найдите самое маленькое из исходных чисел.

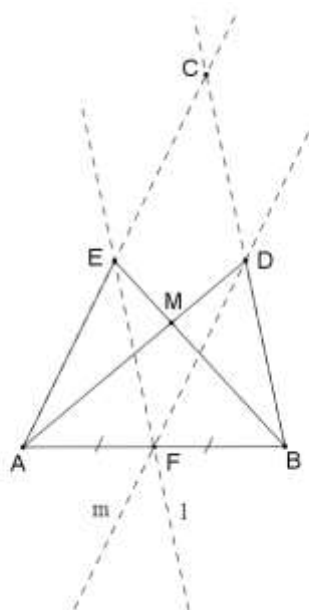
**Решение.** Пусть  $x$  – наибольшее из данных чисел, а  $y$  – то число, которое уменьшили. Тогда  $x + y = 2x + y - 10$ ,  $x = 10$ .

Так как среднее арифметическое исходных чисел равно 10 и самое большое из этих чисел также равно 10, то каждое из данных чисел равно 10.

**Ответ.** 10.

3. (7 баллов) Дан треугольник, одна из вершин которого «недоступна». Постройте точку пересечения медиан этого треугольника.

**Решение.**



Пусть дан треугольник  $ABC$  в котором вершина  $C$  «недоступна».

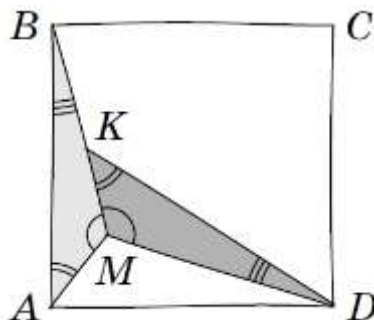
Отметим на стороне  $AB$  точку  $F$  – середину  $AB$ .

Проведём через точку  $F$  прямую  $l$ , параллельную  $BC$ . Прямая  $l$  пересекает  $AC$  в точке  $E$ . Точка  $E$  – основание медианы  $BE$ .

Проведём через точку  $F$  прямую  $m$ , параллельную  $AC$ . Прямая  $m$  пересекает  $BC$  в точке  $D$ . Точка  $D$  – основание медианы  $AD$ .

Тогда искомой точкой пересечения медиан будет точка  $M$  (см.рисунок).

4. (7 баллов) Два равных треугольника расположены внутри квадрата, как показано на рисунке. Найдите их углы.



**Решение.** Треугольник  $MAD$  равен треугольнику  $MAB$  (по трём сторонам): сторона  $MA$  – общая,  $AD = AB$  как стороны квадрата,  $MD = MB$  по условию (лежат напротив соответственных углов в равны треугольниках).

Значит,  $\angle BAM = \angle MAD = 90^\circ : 2 = 45^\circ$ . В точке  $M$  сходятся три соответственных угла равных треугольников,  $\angle AMB = 360^\circ : 3 = 120^\circ$ . Сумма углов треугольника равна  $180^\circ$ , значит,  $\angle ABM = 180^\circ - 120^\circ - 45^\circ = 15^\circ$ .

**Ответ.**  $120^\circ, 45^\circ, 15^\circ$ .

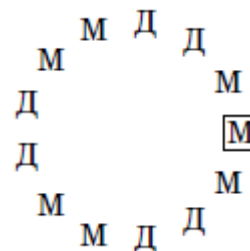
5. (7 баллов) 13 детей сели за круглый стол и договорились, что мальчики будут врать девочкам, а друг другу говорить правду, а девочки, наоборот, будут врать мальчикам, а друг другу говорить правду. Один из детей сказал своему правому соседу: «Большинство из нас мальчики». Тот сказал своему правому соседу: «Большинство из нас девочки», а он своему соседу справа: «Большинство из нас мальчики», а тот своему: «Большинство из нас девочки» и так далее, пока последний ребёнок не сказал первому: «Большинство из нас мальчики». Сколько мальчиков за столом?

**Решение.** Понятно, что за столом были и мальчики, и девочки. Посмотрим, как сидели дети. За группой сидящих рядом мальчиков следует группа девочек, затем снова мальчики, снова девочки и так далее (группа может состоять и их одного человека). Группы мальчиков и девочек чередуются, поэтому их чётное число. Так как утверждений «большинство из нас

мальчики» прозвучало семь, то неверны шесть утверждений «большинство из нас девочки», и групп тоже было шесть.

Чередование верных и неверных утверждений означает, что в группах было по двое детей. Лишь сидящие рядом первый и последний ребёнок сказали одно и то же, поэтому в их группе три человека. Это мальчики, так как их большинство. Всего за столом сидели  $2+2+2=6$  девочек и  $2+2+3=7$  мальчиков.

На рисунке показано, как именно ребята сидели за столом. Первый говорящий обведён в рамочку.



**Ответ. 7.**

*Максимальное количество баллов – 35.*