8 класс.

1. На доске написано несколько различных целых чисел таких, что произведение трёх наименьших из них равно 8, а произведение трёх наибольших из них равно 27. Может ли оказаться, что на доске написано ровно пять чисел?

Ответ: может.

Решение. Пример: 9, 3, 1, –2, –4.

Критерии. Ответ без примера: 0 баллов.

2. Петя в 16 клетках квадрата 5×5 записал единицы, а в оставшихся девяти - нули. Петя нашёл все возможные суммы в четырёх клетках, образующих квадрат 2×2. Оказалось, что сумма шестнадцати чисел, найденных Петей, равна 28. В каких клетках записаны единицы? Нужно указать все варианты.

Ответ: нули во всех внутренних клетках, в остальных единицы.

Решение. Для каждой клетки выясним, в какое количество квадратов 2×2 она входит. Угловые входят только в один такой квадрат. Граничащие со стороной и отличные от угловых - в два квадрата. Остальные - в четыре. Найдём, какой наименьшей может быть сумма для всех квадратов 2×2, если записано 16 единиц. Вклад угловых клеток 1, для остальных крайних 2 (их 12). То есть сумма $4\cdot1+12\cdot2=28$. В других клетках вклад 4. И при любой замене сумма будет больше 28.

Критерии. Приведён правильный ответ, но не доказано, что других нет: 1 балл.

3. Действительные числа a и b таковы, что $a^5+b^5=3$, $a^{15}+b^{15}=9$. Найти значение выражения $a^{10}+b^{10}$.

Ответ: 5.

Решение. Пусть $x=a^5$, $y=b^5$. Тогда $x+y=3$, $x^3+y^3=9$; $(x+y)(x^2–xy+y^2)=9$; $3(x^2–xy+y^2)=9$; $x^2–xy+y^2=3$; $x^2+2xy+y^2=9$; $3xy=6$; $xy=2$; $x^2+y^2=9–2xy=9–2\cdot2=5$; $a^{10}+b^{10}=x^2+y^2=5$.

Критерии. Сделано упрощение с помощью замены, но решение не закончено: 1 балл.

Найдено значение $xy=2$, но решение не закончено: 3 балла.

4. В компании из 8 человек каждый знаком ровно с 6 другими. Сколькими способами можно выбрать четырёх человек, любые двое из которых знакомы? (Считаем, что если А знаком с В, то и В знаком с А, а также, что человек не знаком сам с собой, так как понятие знакомства относится к двум разным людям.)

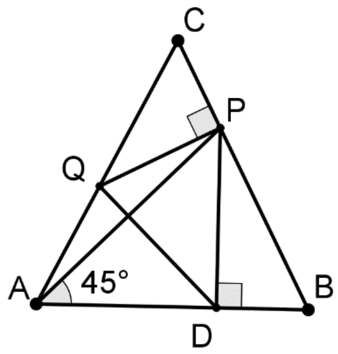
Ответ: 16.

Решение. Каждый человек из компании не знает $8–1–6=1$ человека из этой компании. Значит, компания разбивается на четыре пары незнакомых. Из каждой пары в компанию четырёх попарно знакомых мы можем взять только одного. Выбор такой компании состоит из четырёх шагов, на каждом из которых есть два варианта выбора (каждой из пар), и по правилу произведения компанию можно выбрать $2^4=16$ способами.

Критерии. Показано, что каждый не знаком ровно с одним из остальных и только: 1 балл.

Указано, что из каждой пары незнакомых нужно выбрать ровно одного, но вычисления неверны: 3 балла.

5. На стороне BC треугольника ABC взяли точку P так, что $\angle PAB=45°$. Серединный перпендикуляр к отрезку AP пересекает сторону AC в точке Q. Оказалось, что $PQ \perp BC$. Доказать, что треугольник ABC равнобедренный.



Решение. Способ 1. Пусть D точка пересечения серединного перпендикуляра к отрезку AP со стороной AB. Точки серединного перпендикуляра к отрезку равноудалены от его концов. Значит, AD=DP и AQ=QP. Треугольник ADP равнобедренный, значит $\angle APD=\angle PAD=45°$.Из теоремы о сумме углов треугольника имеем $\angle PDA=90°$ или $PD \perp BD$. Треугольники ADQ и PDQ равны по трём сторонам, поэтому $\angle QAD= \angle QPD$. Углы QPD и PBA равны как острые с взаимно перпендикулярными сторонами. Ввиду транзитивности равенства углов $\angle CAD=\angle CBA$ и значит треугольник ACB равнобедренный.

Способ 2. Пусть $\angle QAP=\alpha$. Точки серединного перпендикуляра к отрезку равноудалены от его концов. Значит, AQ=QP. Треугольник AQP равнобедренный с основанием AP, поэтому $\angle QPA=\angle QAP=\alpha$. $\angle APB=\angle QPB-\angle QPA=90°-\alpha$. Используя терему о сумме углов треугольника, имеем $\angle PBA=180-\angle PAB-\angle APB=180°-45°-(90°-\alpha)=45°+\alpha$. $\angle QAB=\angle QAP+\angle PAB=\alpha+45°$. Значит, $\angle CAB=\angle CBA$, и треугольник ABC равнобедренный.

6. Пусть a и b – натуральные числа. Доказать, что хотя бы одно из чисел: a, b, $a+b$ - равняется разности квадратов двух целых чисел.

Решение. Так как $(n+1)^2-n^2=2n+1$, то любое нечётное число можно представить в виде разности квадратов двух последовательных чисел. Так как $(n+1)^2-(n-1)^2=4n$, то любое число, кратное четырём, есть разность двух квадратов. Осталось рассмотреть случай, когда a и b кратны 2, но не кратны 4. В этом случае они представляются в виде $a=2(2k+1)$ и $b=2(2m+1)$. В этом случае $a+b=4(k+m+1)$ и является разностью квадратов двух чисел: $k+m+2$ и $k+m$.

Критерии.

Показано только, что нечётное число - разность квадратов двух последовательных чисел: 2 балла.

Показано только, что число кратное 4 - разность квадратов двух последовательных чисел одной чётности: 2 балла.