Муниципальный этап всероссийской олимпиады школьников по математике

8 класс

8.1. Расставьте в клетки таблицы 3×3 целые числа так, чтобы сумма чисел во всей таблице была положительной, а сумма чисел в любом квадрате 2×2 была отрицательной.

Ответ: Например,

1	1	1
1	-6	1
1	1	1

.

Критерий.

7 баллов. Любой верный пример.

Комментарий. Существует несколько различных правильных примеров.

8.2. В тетради выписаны все несократимые дроби с числителем 15, которые больше $\frac{1}{16}$ и меньше $\frac{1}{15}$. Сколько всего таких дробей выписано в тетради?

Ответ: 8 дробей.

Решение. Ищем все подходящие несократимые дроби вида $\frac{n}{15}$. Так как $\frac{1}{16} < \frac{15}{n}$, то $\frac{15}{240} < \frac{15}{n}$, тогда $n < 240$. Так как $\frac{1}{15} > \frac{15}{n}$, то $\frac{15}{225} > \frac{15}{n}$, и $n > 225$. Значит, $225 < n < 240$. Дробь $\frac{n}{15}$ несократима, то есть n не делится ни на 3, ни на 5. Несложно убедиться, что из диапазона от 226 до 239 (14 чисел) нужно исключить 6 чисел (228, 230, 231, 234, 235, 237). Остается 8 возможных значений n.

Критерии.

1 балл. Верный ответ без верного обоснования.

2 балла. Верно получен диапазон для n.

0 баллов. При переборе дробей рассмотрены не все случаи.

Комментарий. Вполне возможно, участники будут пытаться выписать все такие дроби, а потом обосновывать, почему знаменатель не может быть больше или меньше, – внимательно следить за аккуратностью таких обоснований.

8.3. В банановой республике прошли выборы в парламент, в которых участвовали все жители. Все голосовавшие за партию «Мандарин» любят мандарины. Среди голосовавших за другие партии 90% не любят мандарины (остальные любят). Сколько процентов голосов набрала партия «Мандарин» на выборах, если ровно 46% жителей республики любят мандарины?

Ответ: 40%.

Решение. Пусть за партию «Мандарин» проголосовало x%. Тогда за остальные партии $(100 - x)$%. Десятая часть от $(100 - x)$% любят мандарины, поэтому получаем уравнение $x + (100 - x)/10 = 46$. Находим, что $x = 40$.

Критерии.

5 баллов. Обоснованно составлено верное уравнение.

8.4. На доске написано трехзначное число, в записи которого нет ни одного нуля. Петя записал к себе в тетрадь все различные числа, которые можно получить из исходного перестановкой цифр (включая число, написанное на доске). Сумма всех чисел, записанных Петей в тетрадь, оказалась равна 444. Какое число могло быть изначально написано на доске?

Ответ: 112, 121, 211, 444.

Решение. Если бы в исходном трехзначном числе все цифры были различны, то Петя записал бы 6 различных трехзначных чисел, и их сумма была бы не меньше 600. Таким образом, возможны два случая. 1) Если все цифры были одинаковы, то Петя записал всего одно исходное число, и оно как раз равно 444. 2) В исходном числе было 2 одинаковые цифры. Пусть в числе было две цифры a и одна цифра b. Тогда Петя записал себе в тетрадь числа $\overline{aab} = 100a + 10a + b$, $\overline{aba} = 100a + 10b + a$ и $\overline{baa} = 100b + 10a + a$. Их сумма равна $222a + 111b = 111(2a + b)$. Таким образом, $2a + b = 444/111 = 4$. Отсюда получаем единственное решение: $a = 1, b = 2$.

Критерии.

1 балл. Только ответ.

5 баллов. Не рассмотрен случай, когда все цифры были одинаковы (соответственно, в ответе пропущено число 444).

Минус 2 балла. Не доказана невозможность случая, когда все 3 цифры были различны (либо такой случай не рассмотрен вовсе).

Комментарий. Если все остальное написанное верно, ставим 5 баллов, если случай со всеми тремя одинаковыми цифрами тоже не рассмотрен, то с учетом предыдущего критерия получается 3 балла.

8.5. В равнобедренном треугольнике ABC угол A при основании равен 75^o. Биссектриса угла A пересекает сторону BC в точке K. Найдите расстояние от точки K до основания AC, если $BK = 10$.

Ответ: 5.

Решение. В треугольнике ABC $\angle B = (180^0 - 75^0 - 75^0) = 30^0$. Опустим из точки K перпендикуляры: KH – на сторону AB, KN – на сторону AC. В прямоугольном треугольнике HBK гипотенуза BK равна 10. Угол B равен 30 градусам, против него лежит половина гипотенузы, значит $HK = 5$. Треугольники AHK и ANK равны по гипотенузе и острому углу, значит, $KN = KH = 5$.

Критерии.

1 балл. Опущен перпендикуляр из точки K на сторону AB.

2 балла. Найдена длина перпендикуляра, опущенного из точки K на сторону AB.

Комментарий. Баллы по критериям суммируются.